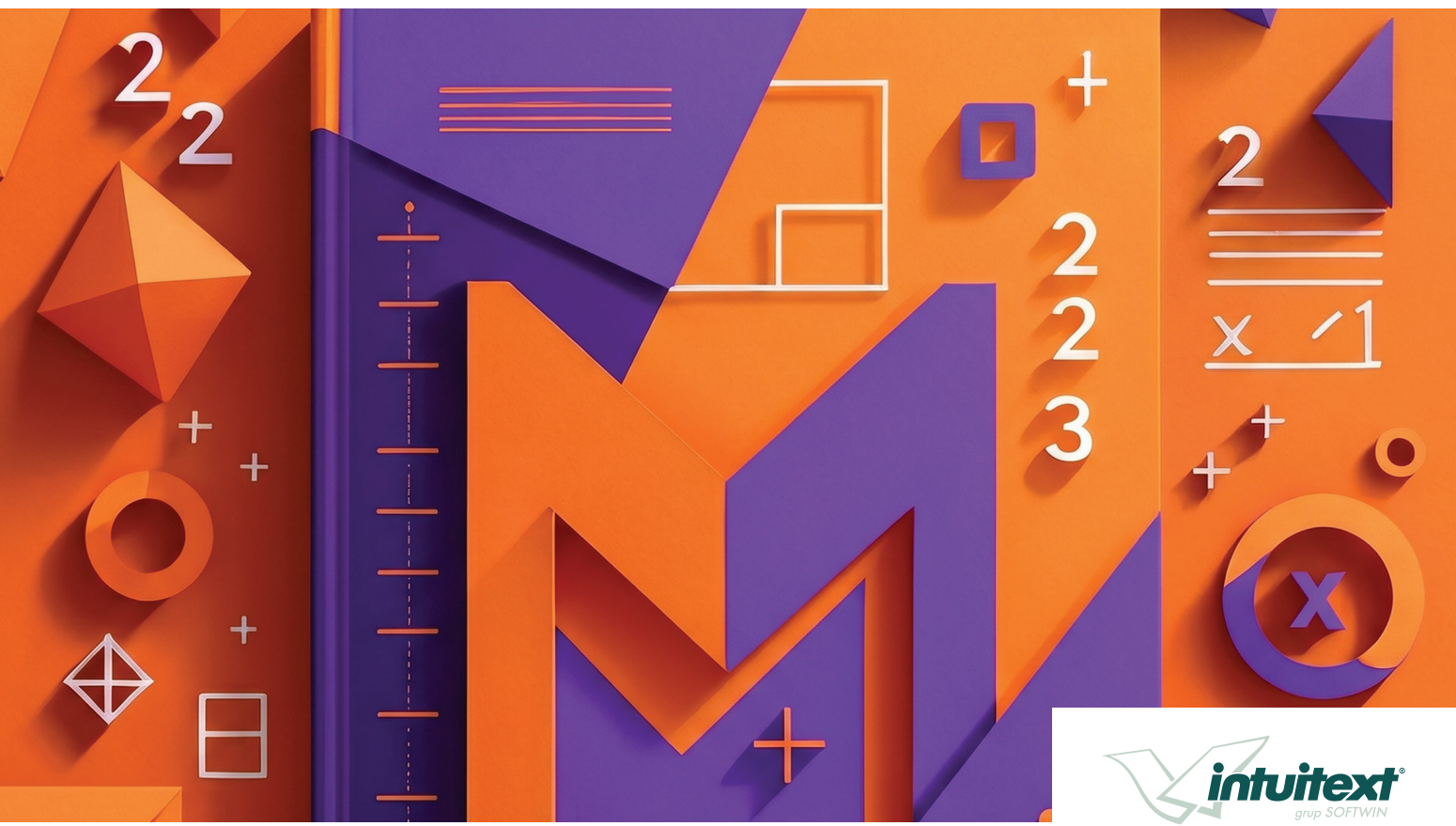
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

GABRIEL CIUPALĂ • DAN DUMITRESCU • CĂTĂLIN GHERGHE

IX

MATEMATICĂ

TRUNCHI COMUN ȘI CURRICULUM DE SPECIALITATE (TC+CS),
FILIERA TEORETICĂ, PROFILUL REAL,
SPECIALIZAREA MATEMATICĂ-INFORMATICĂ



intuitext
grup SOFTWIN

Acest manual este proprietatea Ministerului Educației și Cercetării.

Manualul școlar a fost aprobat prin Ordinul ministrului educației și cercetării nr. 5779/09.10.2026.

Acest manual şcolar este realizat în conformitate cu Programa şcolară aprobată prin Ordinul ministrului educaţiei și cercetării nr. 6930/19.12.2025.



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

GABRIEL CIUPALĂ • DAN DUMITRESCU • CĂTĂLIN GHERGHE

IX

MATEMATICĂ

TRUNCHI COMUN ȘI CURRICULUM DE SPECIALITATE (TC+CS),
FILIERA TEORETICĂ, PROFILUL REAL,
SPECIALIZAREA MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

clasa a IX-a



intuitext
grup SOFTWIN

Disciplina: **Matematică**
Clasa: **a IX-a**
Număr de pagini: **276**

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE						
Anul	Numele elevului	Clasa	Școala	An școlar	Starea manualului*	
					la primire	la returnare
1						
2						
3						
4						

*Starea manualului se înscrie folosind termenii: *nou, bun, îngrijit, nesatisfăcător, deteriorat.*

Cadrele didactice vor controla dacă numele elevului este scris corect. Elevii nu trebuie să facă niciun fel de însemnări pe manual.

Copyright © 2026 – **Editura INTUITEXT**
Toate drepturile rezervate Editurii INTUITEXT.
Nicio parte din acest volum nu poate fi copiată fără permisiunea scrisă a Editurii INTUITEXT.

Editura INTUITEXT
București, b-dul Dimitrie Pompeiu 10A
Clădirea Conect 1, etaj 1, zona A, biroul nr. 2, sector 2

Departamentul vânzări:
Telefon: 0372.156.300
Fax: 021.233.07.63
vanzari@intuitext.ro
www.intuitext.ro

Referenți:
Prof. Dr. Radu Gologan, Universitatea Politehnică, București
Prof. gr. didactic I Ancuța Silvia Mititean, Colegiul Național „Liviu Rebreanu”, Bistrița

MATEMATICĂ IX PREZENTAREA MANUALULUI

Amintește-ți!

Reia rapid noțiuni învățate anterior, de care vei avea nevoie acum.

Observă și descoperă!

Te invită să descoperi singur/ă o regulă, prin sarcini în pași mici.

★ Important!

Sintetizează - definițiile, formulele și legile de care trebuie să-ți amintești.

Exersează!

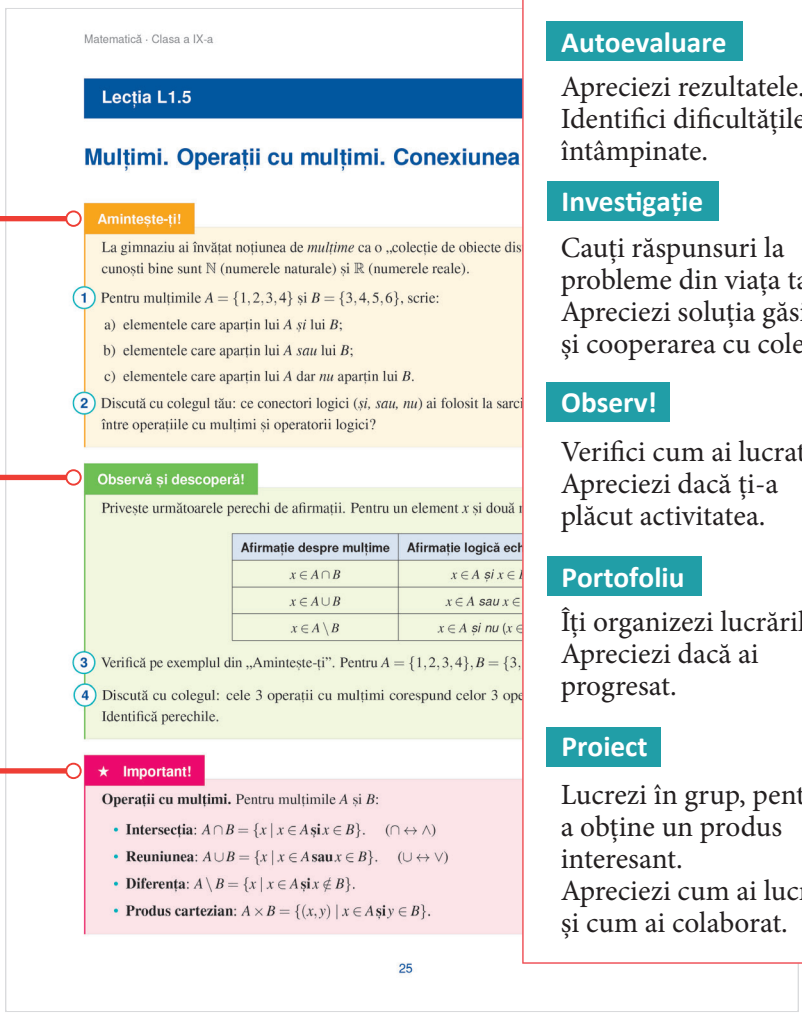
Aplică ce ai învățat - sarcini de lucru graduale, de la simplu la complex.

Bine de știut!

Atrage atenția asupra unei capcane frecvente sau a unei recomandări utile.

Aplicație digitală

Te invită să folosești telefonul, un calculator grafic sau o simulare online.


Matematică · Clasa a IX-a

Lecția L1.5

Mulțimi. Operații cu mulțimi. Conexiunea

Amintește-ți!

La gimnaziu ai învățat noțiunea de *mulțime* ca o „colecție de obiecte dis
cunoști bine sunt $\mathbb{N}$ (numerele naturale) și $\mathbb{R}$ (numerele reale).

1. Pentru mulțimile $A=\{1,2,3,4\}$ și $B=\{3,4,5,6\}$, scrie:
   a) elementele care aparțin lui A și lui B;
   b) elementele care aparțin lui A *sau* lui B;
   c) elementele care aparțin lui A dar *nu* aparțin lui B.
2. Discută cu colegul tău: ce conectori logici (*și, sau, nu*) ai folosit la sarci
între operațiile cu mulțimi și operatorii logici?

Observă și descoperă!

Privește următoarele perechi de afirmații. Pentru un element x și două

Afirmație despre mulțime	Afirmație logică ech
$x\in A\cap B$	$x\in A$ și $x\in$
$x\in A\cup B$	$x\in A$ sau $x\in$
$x\in A\setminus B$	$x\in A$ și nu $(x\in$

3. Verifică pe exemplul din „Amintește-ți”. Pentru $A=\{1,2,3,4\}, B=\{3,$
4. Discută cu colegul: cele 3 operații cu mulțimi corespund celor 3 ope
Identifică perechile.

★ Important!

Operații cu mulțimi. Pentru mulțimile A și B:

- **Intersecția**: $A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ și } x\in B\}$. $(\cap\leftrightarrow\wedge)$
- **Reuniunea**: $A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ sau } x\in B\}$. $(\cup\leftrightarrow\vee)$
- **Diferența**: $A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ și } x\notin B\}$.
- **Produs cartezian**: $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A \text{ și } y\in B\}$.

25

Autoevaluare

Apreciezi rezultatele. Identifici dificultățile întâmpinate.

Investigație

Cauți răspunsuri la probleme din viața ta. Apreciezi soluția găsită și cooperarea cu colegii.

Observ!

Verifici cum ai lucrat. Apreciezi dacă ți-a plăcut activitatea.

Portofoliu

Îți organizezi lucrările. Apreciezi dacă ai progresat.

Proiect

Lucrezi în grup, pentru a obține un produs interesant. Apreciezi cum ai lucrat și cum ai colaborat.

Recapitulare

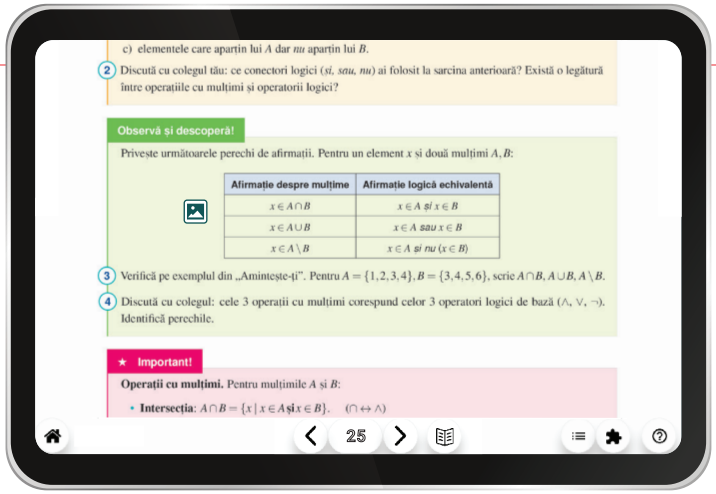
Recapitulezi, într-o formă nouă, atractivă, ceea ce ai învățat!

Evaluare

Afli cât ai progresat, ce dificultăți ai, cum poți corecta pentru a merge mai departe.

Exersezi, corectezi, progresezi

Evaluează-ți progresul și pregătește-te pentru noi pași în învățare!



Imagine în manualul digital

Film sau animație în manualul digital

Activitate interactivă în manualul digital

Acasă

25 Mergi la pagina

Cuprins interactiv

Activități de învățare

Ajutor

Vezi o pagină/ Vezi două pagini

Cuprins

U1 — Elemente de logică matematică p. 7

Lecția L1.1 — Propoziții. Operații cu propoziții. . . . 8
Lecția L1.2 — Predicate. Operații cu predicate. Cuantificatori. Reguli de negare . . . 12
Lecția L1.3 — Reducerea la absurd . . . 17
Lecția L1.4 — Metoda inducției matematice . . . 20
Recapitulare . . . 25
Evaluare . . . 27
Exersezi, corectezi, progresezi . . . 28

U2 — Șiruri și progresii p. 31

Lecția L2.1 — Șiruri. Moduri de definire a unui șir . . . 32
Lecția L2.2 — Progresii aritmetice . . . 37
Lecția L2.3 — Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice . . . 41
Lecția L2.4 — Progresii geometrice . . . 47
Lecția L2.5 — Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice. Aplicație: $a^n - b^n$ . . . 52
Lecția L2.6 — Aplicații ale șirurilor și progresiilor în contexte practice . . . 56
Recapitulare . . . 62
Investigație . . . 65
Evaluare . . . 67
Exersezi, corectezi, progresezi . . . 69

U3 — Funcții. Proprietăți generale ale funcțiilor p. 72

Lecția L3.1 — Funcții: definiție, exemple, modalități de descriere . . . 73
Lecția L3.2 — Reprezentarea grafică. Intersecția cu axele . . . 78
Lecția L3.3 — Semnul unei funcții. Soluțiile ecuațiilor $f(x) = m$ și $f(x) = g(x)$ . . . 83
Lecția L3.4 — Proprietăți ale funcțiilor: monotonie, mărginire, paritate, convexitate . . . 87
Lecția L3.5 — Operații algebrice cu funcții. Compunerea funcțiilor . . . 94
Lecția L3.6 — Funcții injective, surjective, bijective, inversabile . . . 98
Recapitulare . . . 104
Aplicație digitală: tabelul de variație . . . 109
Evaluare . . . 110
Exersezi, corectezi, progresezi . . . 112

U4 — Funcția de gradul al doilea p. 116

Lecția L4.1 — Funcția de gradul al doilea: definiție, grafic. Formula de rezolvare a ecuației de gradul al doilea . . . 117
Lecția L4.2 — Monotonia funcției de gradul al doilea. Punctul de extrem . . . 123
Lecția L4.3 — Semnul funcției. Inecuații de gradul al doilea . . . 129
Lecția L4.4 — Relațiile lui Viète . . . 134
Lecția L4.5 — Sisteme care conțin ecuații de gradul al doilea . . . 139
Recapitulare . . . 147
Proiect. . . . 152

Evaluare . . . 154
Exersezi, corectezi, progresezi . . . 156

U5 — Funcția putere cu exponent întreg. Funcția radical **p. 159**

Lecția L5.1 — Funcția putere cu exponent întreg . . . 160
Lecția L5.2 — Radicali. Operații. Funcția radical . . . 167
Lecția L5.3 — Ecuații și inecuații cu radicali . . . 173
Recapitulare . . . 178
Evaluare . . . 182
Exersezi, corectezi, progresezi . . . 184

U6 — Funcții trigonometrice. Ecuații trigonometrice **p. 187**

Lecția L6.1 — Cercul trigonometric. Funcțiile $\sin$ și $\cos$ pe $[0, 2\pi]$ . . . 188
Lecția L6.2 — Funcțiile $\sin$, $\cos$, tg, ctg pe $\mathbb{R}$. Periodicitate . . . 192
Lecția L6.3 — Relații între funcțiile trigonometrice . . . 197
Lecția L6.4 — Formule pentru suma și diferența a două numere reale . . . 201
Lecția L6.5 — Transformarea sumelor în produse și a produselor în sume . . . 205
Lecția L6.6 — Funcții trigonometrice inverse . . . 208
Lecția L6.7 — Ecuații trigonometrice . . . 211
Recapitulare . . . 215
Evaluare . . . 218
Exersezi, corectezi, progresezi . . . 220

U7 — Aplicații ale trigonometriei în geometrie. Relații metrice **p. 223**

Lecția L7.1 — Teorema cosinusului . . . 224
Lecția L7.2 — Teorema sinusurilor . . . 228
Lecția L7.3 — Rezolvarea triunghiurilor . . . 231
Lecția L7.4 — Raza cercului înscris și raza cercului circumscris. Aria triunghiului . . . 235
Lecția L7.5 — Teorema bisectoarei. Relația lui Stewart . . . 239
Lecția L7.6 — Concurență și coliniaritate: teoremele lui Menelaus și Ceva . . . 243
Recapitulare . . . 247
Evaluare . . . 250
Exersezi, corectezi, progresezi . . . 252

U8 — Recapitulare finală. Sinteze și teste integratoare **p. 255**

Lecția L8.1 — Sinteză U1+U2: logică, mulțimi, șiruri, progresii . . . 256
Lecția L8.2 — Sinteză U3–U5: funcții, gradul al doilea, putere, radical . . . 258
Lecția L8.3 — Sinteză U6+U7: trigonometrie și aplicații în geometrie . . . 260
Hartă conceptuală a întregului an . . . 262
Test 1 — Simulare (90 min) . . . 263
Test 2 — Test final integrator (90 min) . . . 266
Exersezi, corectezi, progresezi (final) . . . 269
Jurnal de învățare . . . 275

Competențe generale (CG)

CG.1	Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar
CG.2	Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale
CG.3	Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice
CG.4	Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată
CG.5	Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date
CG.6	Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

Competențe specifice (CS)

IX.CS.1.1. Identificarea propozițiilor elementare din care este alcătuit un enunț matematic.

IX.CS.1.2. Identificarea elementelor specifice șirurilor/progresiilor în contexte variate.

IX.CS.1.3. Identificarea unor relații de tip dependență funcțională între variabile sau entități, pentru a evidenția elemente ale funcțiilor.

IX.CS.1.4. Identificarea pe cercul trigonometric a punctelor asociate unor numere reale.

IX.CS.1.5. Identificarea elementelor necesare pentru calcularea unor măsuri (lungimi de segmente, unghiuri, arii).

IX.CS.2.1. Identificarea operațiilor cu propoziții elementare din cadrul unui enunț matematic

IX.CS.2.2. Efectuarea de calcule pentru determinarea elementelor șirurilor, progresiilor aritmetice și geometrice, utilizând formule specifice.

IX.CS.2.3. Extragerea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ și structural, din reprezentări grafice pentru a descrie proprietățile unei funcții (monotonie, convexitate, puncte de extrem etc.) într-o situație practică dată.

IX.CS.2.4. Stabilirea unor caracteristici calitative/cantitative folosind funcții trigonometrice, inclusiv folosind instrumente digitale.

IX.CS.2.5. Aplicarea unor metode adecvate pentru determinarea unor distanțe, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii.

IX.CS.3.1. Determinarea valorii de adevăr a unui enunț matematic format din propoziții legate prin operatori logici.

IX.CS.3.2. Aplicarea algoritmilor de calcul pentru determinarea unor termeni și a sumelor unor termeni consecutivi ai progresiilor aritmetice și geometrice, în diferite contexte.

IX.CS.3.3. Aplicarea unor concepte și algoritmi matematici (funcții, rate de variație etc.), pentru a interpreta reprezentări grafice în scopul extragerii de informații relevante pentru rezolvarea, în contexte matematice, a unor probleme practice.

IX.CS.3.4. Calcularea valorii unei funcții trigonometrice când se cunosc informații despre valorile unei alte funcții trigonometrice.

IX.CS.3.5. Determinarea măsurilor unor unghiuri și a lungimilor unor segmente utilizând relații metrice.

IX.CS.4.1. Precizarea structurii logice a unui enunț.

IX.CS.4.2. Transpunerea în limbaj specific matematic a unor situații din viața cotidiană referitoare la șiruri sau progresii în scopul analizării comportamentului acestora.

IX.CS.4.3. Exprimarea unor concluzii și justificări matematice, utilizând limbajul specific funcțiilor (simboluri, formule, expresii, reprezentări), pentru a comunica informații extrase din reprezentări grafice, în contexte matematice practice.

IX.CS.4.4. Stabilirea unor relații matematice utilizând calculul trigonometric.

IX.CS.4.5. Caracterizarea în limbaj matematic a unei configurații geometrice folosind elemente de trigonometrie sau relații metrice

IX.CS.5.1. Formularea unui enunț matematic (axiomă, definiție, relație/proprietate/teoremă) asociat unei situații date.

IX.CS.5.2. Analizarea unor situații date în contexte intra- și interdisciplinare, selectând modelul de progresie adecvat și metoda de rezolvare eficientă în funcție de datele disponibile.

IX.CS.5.3. Analizarea unor situații date prin interpretarea reprezentărilor grafice și evidențierea soluțiilor posibile pentru a interpreta situații reale și a formula concluzii argumentate în contexte intra- și interdisciplinare.

IX.CS.5.4. Analizarea proprietăților funcțiilor trigonometrice folosind reprezentarea grafică sau cercul trigonometric.

IX.CS.5.5. Aplicarea unor metode variate pentru optimizarea calculelor de distanțe, de măsuri de unghiuri și de arii

IX.CS.6.1. Validarea unui enunț matematic asociat unei situații date

IX.CS.6.2. Modelarea matematică, folosind șirurile sau progresiile, a unor situații reale pentru interpretarea implicațiilor în contexte interdisciplinare și pentru luarea unor decizii fundamentate pe datele obținute

IX.CS.6.3. Modelarea unei situații reale, utilizând un model matematic (funcții, relații) construit pe baza datelor extrase din reprezentări grafice, pentru a explica, a anticipa sau a optimiza rezultate în contexte precum economie, biologie sau fizică

IX.CS.6.4. Descrierea unor relații între mărimi din diferite domenii, cu ajutorul funcțiilor trigonometrice

IX.CS.6.5. Modelarea unor configurații geometrice utilizând metode metrice, trigonometrice, sintetice

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE

U1

Elemente de logică matematică

„Logica este igiena pe care matematicianul o practică pentru a-și păstra ideile sănătoase și puternice.”

— Hermann Weyl

Lecțiile unității

- L1.1 — Propoziții. Operații cu propoziții
- L1.2 — Predicate. Operații cu predicate. Cuantificatori. Reguli de negare
- L1.3 — Reducerea la absurd
- L1.4 — Metoda inducției matematice
- Recapitulare
- Evaluare
- Exersezi, corectezi, progresezi
- Autoevaluare

Ce vei învăța

- să recunoști propozițiile elementare din care este format un enunț matematic;
- să identifici operațiile logice (negație, conjuncție, disjuncție, implicație, echivalență) dintr-un enunț;
- să stabilești valoarea de adevăr a unui enunț format din mai multe propoziții;
- să precizezi structura logică a unui enunț (predicate, cuantificatori);
- să formulezi un enunț matematic potrivit unei situații date;
- să stabilești dacă un enunț este adevărat sau fals (contraexemplu, reducere la absurd, inducție matematică).



Lecția L1.1

Propoziții. Operații cu propoziții

Amintește-ți!

În gimnaziu ai folosit deja afirmații matematice de tipul „$3+4=7$” sau „triunghiul echilateral are toate laturile egale”. În această lecție le vei aborda din nou, dar cu ochi de matematician: vei învăța să stabilești dacă enunțuri cu diferite grade de complexitate, formate din mai multe alte enunțuri, sunt *adevărate* sau *false* și ce înseamnă să le combini cu „și”, „sau”, „dacă... atunci...”.

1 **Recunoaște.** Citește enunțurile de mai jos. Identifică pe acelea despre care se poate spune, fără ambiguitate, că sunt adevărate sau false.

a) Numărul 7 este prim.

b) Vino la tablă!

c) $\sqrt{2}$ este număr rațional.

d) Câți elevi sunt astăzi în clasă?

e) Astăzi este miercuri.

Observă și descoperă!

Maria și Andrei primesc o serie de enunțuri și trebuie să stabilească dacă sunt adevărate sau false. Indiferent cât de complicat este un enunț, ei lucrează cu *piese mici*: enunțuri simple, care pot fi doar adevărate sau doar false și din care sunt alcătuite enunțurile complexe.

2 Completează tabelul cu A sau cu F, după cum enunțurile sunt adevărate sau false.

Enunț	A/F
p_1: „5 este număr par”	
p_2: „$2\cdot 3=6$”	
p_3: „Bucureștiul este capitala României”	
p_4: „$\sqrt{9}=-3$”	

3 Discută cu colegul de bancă. Ce au în comun enunțurile p_1, p_2, p_3, p_4? Prin ce diferă acestea de enunțul „Vino la tablă!”?

4 Considerăm acum două enunțuri legate prin diferite cuvinte de legătură.

- „5 este număr par **și** $2\cdot 3=6$.”

- „5 este număr par **sau** $2 \cdot 3 = 6$.”

Discută cu colegul tău: când consideri că este adevărat enunțul cu „și”? Dar cel cu „sau”? Dă câte un exemplu din viața de zi cu zi, atât pentru a obține un enunț adevărat, cât și pentru a obține un enunț fals.

★ Important!

Definiție. Numim *propoziție matematică* (sau, simplu, propoziție) un enunț care este **adevărat** sau **fals**, dar nu ambele simultan.

Propozițiile se notează cu litere mici: $p, q, r, \ldots$ *Valoarea de adevăr* a propoziției p se notează $v(p)$:

$$v(p) = 1, \text{ dacă } p \text{ este adevărată}; \quad v(p) = 0, \text{ dacă } p \text{ este falsă}.$$

Operații cu propoziții. Pornind de la propozițiile p și q, formăm propoziții compuse:

Operația	**Notație**	**Citire**
Negația	$\neg p$ (sau $\overline{p}$)	„non p” / „nu este adevărat că p”
Conjuncția	$p \wedge q$	„p și q”
Disjuncția	$p \vee q$	„p sau q”
Implicația	$p \Rightarrow q$	„dacă p, atunci q”
Echivalența	$p \Leftrightarrow q$	„p dacă și numai dacă q”

Tabelele de adevăr dau valoarea de adevăr a fiecărei propoziții compuse, pentru toate combinațiile de valori de adevăr ale lui p și q:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Conjuncția este adevărată doar când *ambele* propoziții sunt adevărate (intersecție de cazuri). **Disjuncția** este falsă doar când *ambele* sunt false (reuniune de cazuri).
Pentru două enunțuri (expresii logice) E_1 și E_2, scriem $E_1 \equiv E_2$ (citim „E_1 este echivalentă logic cu E_2”) dacă au întotdeauna aceeași valoare de adevăr: pentru expresii formate din propozițiile p și q, oricare ar fi valorile de adevăr ale lui p și q (adică au același tabel de adevăr); pentru enunțuri cu cuantificatori (pe care le vei studia în lecția L1.2), oricare ar fi predicatul $P(x)$.

Legile lui De Morgan:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q;$$
$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q.$$

Negarea implicației și a echivalenței: $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$;
$\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

Bine de știut!

Capcană frecventă. Implicația $p \Rightarrow q$ este adevărată *și* atunci când p este falsă, indiferent de valoarea lui q (acest fapt se numește „adevăr vacuu"). Verifică pe ultimele două linii ale tabelului de adevăr. Intuitiv: dacă premisa nu se realizează, nu putem dovedi că implicația ar fi greșită.

Aplicație digitală

Verifică tabelele de adevăr cu un instrument digital.

- Pe smartphone sau pe calculator, accesează un *simulator de porți logice* (de exemplu, „Logic Gate Simulator" de pe academo.org) sau o aplicație gratuită din magazinul telefonului.
- Construiește expresia $(p \wedge q) \vee (\neg p)$ cu porțile ȘI, SAU, NU (sau introdu-o direct, dacă aplicația acceptă expresii). Pentru fiecare dintre cele 4 combinații ale valorilor de adevăr ale propozițiilor (p, q), notează rezultatul.
- Compară cu calculul tău, pe hârtie, folosind tabelul de adevăr.

Exersează!

5 Citește enunțul: „5 divide 30 *și* 5 divide 25." Identifică propozițiile elementare din care este alcătuit. Stabilește valoarea de adevăr a fiecăreia.

6 Identifică propozițiile elementare din enunțul: „$\sqrt{16} = 4$ *sau* $\sqrt{16} = -4$."

7 Pentru fiecare enunț, precizează operatorul logic (sau operatorii logici) care leagă propozițiile elementare:

a) „$3 < 5$ și $3 \in \mathbb{N}$."

b) „Numărul 15 este par sau este impar."

c) „Dacă $-2 < -1$, atunci $(-2)^2 < (-1)^2$."

d) „Un patrulater este pătrat dacă și numai dacă are toate laturile egale și un unghi drept."

8 Stabilește valoarea de adevăr a fiecărei propoziții:

a) „$2+2=4$ *și* $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$."

b) „5 este număr prim *sau* 5 este număr par."

c) „Dacă $2+2=5$, atunci $1=0$."

d) „$\pi \in \mathbb{R}$ *dacă și numai dacă* π este număr rațional."

Model de rezolvare — punctul a)

p: „$2+2=4$”. $v(p)=1$.
q: „$\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$”. $\sqrt{2}$ este număr irațional, deci $v(q)=0$.
$v(p\wedge q)=1\wedge 0=0$. Enunțul este **fals**.

9 Maria spune: „*Dacă* îmi termin temele, merg la film.” Maria și-a terminat temele, dar a rămas acasă pentru că s-a îmbolnăvit. A fost adevărată afirmația Mariei? Justifică folosind tabelul de adevăr al implicației.

10 Se consideră *fals* următorul enunț: „Dacă îmi este foame, atunci mănânc.” Determină valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) „Îmi este foame.”

b) „Nu mănânc.”

c) „Dacă nu mănânc, atunci îmi este foame.”

d) „Dacă nu mănânc, atunci nu îmi este foame.”

11 Se consideră *adevărat* următorul enunț: „Dacă învăț, atunci iau note mari.” Determină, acolo unde se poate, valoarea de adevăr a propozițiilor de mai jos; dacă nu se poate, explică de ce.

a) „Nu învăț sau iau note mari.”

b) „Dacă nu iau note mari, atunci nu învăț.”

c) „Dacă nu învăț, atunci nu iau note mari.”

d) „Dacă iau note mari, atunci învăț.”

12 Se consideră *adevărat* următorul enunț: „Sunt înalt dacă și numai dacă mănânc.” Determină, acolo unde se poate, valoarea de adevăr a propozițiilor de mai jos; dacă nu se poate, explică de ce.

a) „Dacă sunt înalt, atunci mănânc.”

b) „Mănânc sau sunt înalt.”

c) „Dacă mănânc, atunci sunt înalt.”

d) „Mănânc și sunt înalt.”

e) „Dacă nu mănânc, atunci sunt înalt.”

f) „Dacă nu mănânc, atunci nu sunt înalt.”

13 Construiește tabelul de adevăr al expresiei $\neg(p\wedge q)$. Compară-l cu tabelul de adevăr al expresiei $\neg p\vee\neg q$. Ce observi?

Lecția L1.2

Predicate. Operații cu predicate. Cuantificatori. Reguli de negare

Amintește-ți!

În L1.1 ai învățat că o propoziție matematică are o singură valoare de adevăr. Dar ce se întâmplă când în enunț apare o *variabilă*? De exemplu: „x este număr prim”.

1 Stabilește valoarea de adevăr a enunțului „x este număr prim” pentru fiecare dintre următoarele valori:

a) $x = 7$;

b) $x = 9$;

c) $x = 1$.

Discută cu colegul tău: poate enunțul să aibă o singură valoare de adevăr, fără să spui cu cât este egal x?

Observă și descoperă!

Sarcina anterioară arată că enunțuri de forma „x are proprietatea …” nu sunt propoziții, până nu îl fixezi pe x. Astfel de enunțuri se numesc *predicate* și se notează $P(x)$, unde x poate lua valori dintr-o anumită mulțime.

2 Se consideră predicatul $P(x)$: „x este număr par”, unde $x \in \mathbb{N}$. Completează tabelul:

Valoarea lui x	Propoziția obținută	$v(P(x))$
0	„0 este par”	
1		
2		
3		

3 Acum considerăm două enunțuri care *folosesc* predicatul $P(x)$:

- „**Pentru orice** $x \in \mathbb{N}$, x este număr par.”
- „**Există** $x \in \mathbb{N}$ astfel încât x este număr par.”

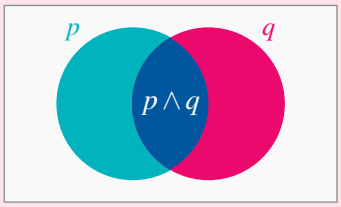
Discută cu colegul tău: care dintre aceste două enunțuri este adevărat? De ce? Ce s-a schimbat față de predicatul de mai sus?

★ Important!

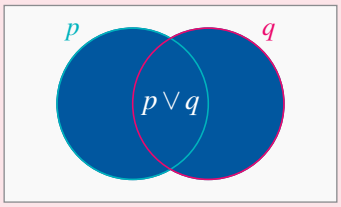
Definiție. Numim *predicat* un enunț care depinde de una sau mai multe variabile, care iau valori într-o mulțime de referință, și care devine propoziție când fixezi valori pentru variabile.

Operații cu predicate. Dacă $P(x)$ și $Q(x)$ sunt predicate cu $x \in M$, putem forma predicatele $\neg P(x)$, $P(x) \wedge Q(x)$, $P(x) \vee Q(x)$, $P(x) \Rightarrow Q(x)$, $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$; pentru fiecare valoare fixată a lui x, valoarea lor de adevăr se obține din tabelele de adevăr din lecția L1.1. Mulțimea $A_P = \{x \in M \mid P(x) \text{ este adevărată}\}$ se numește *mulțimea de adevăr* a predicatului $P(x)$. Avem: $A_{\neg P} = M \setminus A_P$, $A_{P \wedge Q} = A_P \cap A_Q$, $A_{P \vee Q} = A_P \cup A_Q$.

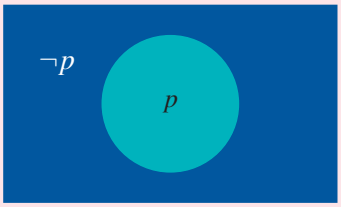
Legătura dintre operațiile logice și operațiile cu mulțimi. Diagramele Venn de mai jos arată corespondența între „și" (conjuncție) și *intersecție*, între „sau" (disjuncție) și *reuniune*, și între „non" (negație) și *complementară*.



Conjuncție
(intersecție)



Disjuncție
(reuniune)



Negație
(complementară)

În aceste diagrame, dreptunghiul reprezintă *universul* (toate situațiile posibile), iar cercurile p și q reprezintă mulțimile situațiilor în care p, respectiv q, este adevărată. Zona colorată cu albastru indică situațiile în care propoziția compusă este adevărată.

Cuantificatorii. Pornind de la un predicat $P(x)$ cu $x \in M$, formăm propoziții folosind:

- **Cuantificatorul universal** $\forall$: $\forall x \in M, P(x)$ se citește „pentru orice $x \in M$, $P(x)$". Este *adevărată* doar dacă $P(x)$ este adevărată pentru *toate* valorile lui x din M.
- **Cuantificatorul existențial** $\exists$: $\exists x \in M, P(x)$ se citește „există $x \in M$ astfel încât $P(x)$" (sau „există cel puțin un x..."). Este *adevărată* dacă există măcar o valoare a lui x din M pentru care $P(x)$ este adevărată.

Reguli de negare. Pentru a nega o propoziție cu cuantificator, schimbi cuantificatorul ($\forall$ cu $\exists$ și invers) și negi predicatul:

$$\neg\big(\forall x \in M,\ P(x)\big) \equiv \exists x \in M,\ \neg P(x);$$
$$\neg\big(\exists x \in M,\ P(x)\big) \equiv \forall x \in M,\ \neg P(x).$$

Bine de știut!

Limbaj formal vs. limbaj cotidian. „Toți copiii din clasă vorbesc engleză" este același tip de afirmație ca „$\forall x \in$ Clasă, x vorbește engleză". Negația ei este: „Există un copil în clasă care nu vorbește engleză". Ca să arăți că afirmația inițială este falsă, e suficient să găsești *un singur* copil din clasă care nu vorbește

engleză (un contraexemplu).
În matematică, la fel: pentru a arăta că o proprietate *nu* este universală, e de ajuns un singur contraexemplu.

Exersează!

4 Identifică, în enunțul „$\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \geq 0$ și $\exists n \in \mathbb{N},\ n+1=0$”, cele două propoziții elementare. Stabilește valoarea de adevăr a fiecăreia.

5 Se consideră predicatul $P(n)$: „n^2+n+1 este număr prim”, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$.

b) Formulează propoziția existențială asociată predicatului $P(n)$, stabilind și valoarea de adevăr a acesteia.

c) Formulează propoziția universală asociată predicatului $P(n)$, stabilind și valoarea de adevăr a acesteia.

6 Scrie negarea fiecărei propoziții, fără să folosești „nu este adevărat că...”.

a) „$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$.”

b) „$\exists n \in \mathbb{N}^*,\ n^2 = 25$.”

c) „$\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$.”

d) „$3 \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.”

Model de rezolvare — punctul a)

Negarea: $\exists x \in \mathbb{R},\ \neg(x^2 \geq 0)$, adică $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$.
Această negare este falsă (nu există x real cu $x^2 < 0$).

7 Lucrați în perechi. Determinați valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții, justificând răspunsul.

(Notații: pentru $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ este partea întreagă a lui x, adică cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x, iar $\{x\} = x - [x] \in [0,1)$ este partea fracționară a lui x.)
p: „$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{Z},\ \left[x^2\right] + 2[x] + y = 1$”
q: „$\exists x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \{x\} + \{y\} = 0$”

8 Se consideră predicatul $P(x,y):\ x+y=5$.
Stabilește valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

a) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ P(x,y)$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ P(x,y)$

c) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ P(x,y)$

9 Se consideră predicatul $P(x,y):\ x^2+y^2=5$.
Stabilește valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

a) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ P(x,y)$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ P(x,y)$

c) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ P(x,y)$

10 Scrie fiecare enunț în limbaj formal (folosind cuantificatori):

a) „Toate numerele naturale care au cifra unităților 0 sunt divizibile cu 5.”

b) „Există un număr real x astfel încât $x^2 = 2$.”

c) „Pentru orice triunghi, suma măsurilor unghiurilor este $180°$.”

11 Scrie în limbajul logicii matematice, utilizând predicate, enunțul:
„Numerele naturale prime de două cifre, cu ambele cifre numere prime, sunt 23, 37, 53 și 73.”

12 Scrie un predicat $P(x)$, $x \in \mathbb{N}$, care este adevărat pentru $x \in \{0,1,4,9\}$ și fals pentru orice alt număr natural.

13 Considerăm toate predicatele $P(x)$ de o variabilă $x \in A$, unde A este o mulțime cu cel puțin două elemente. Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:
s_1: „Există predicate pentru care propoziția universală asociată este falsă, iar propoziția existențială asociată este adevărată.”
s_2: „Pentru orice predicat, dacă propoziția universală asociată este falsă, atunci propoziția existențială asociată lui este falsă.”
s_3: „Dacă predicatul $P(x)$, $x \in A$, are propoziția universală asociată adevărată, iar predicatul $Q(x)$, $x \in A$, are propoziția existențială asociată adevărată, atunci predicatul $P(x) \wedge Q(x)$ are propoziția existențială asociată adevărată.”

14 Aplicația de mesagerie afirmă: „Toate mesajele tale au fost livrate.” Cum pot demonstra prietenii tăi că afirmația este greșită?

15 **Portofoliu.** Scrie negarea propoziției: „$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists m \in \mathbb{N}^*,\ m > n$.”

Portofoliu

Ce vei face? Un portofoliu.
Când îl vei realiza? Pe măsură ce parcurgi unitățile de învățare.
Cum îl vei realiza?

- Vei aduna diferite lucrări realizate în cadrul activităților.
- Unele lucrări îți vor fi propuse de profesoara/profesorul tău.
- Unele lucrări vor fi marcate în manual cu eticheta „Portofoliu”.
- Alte lucrări vor fi alese de tine.

De ce îl vei realiza? Ca să observi:

- realizările tale;
- progresele într-o anumită perioadă;
- ce mai ai de făcut.

Cum vei ști că ai reușit?
Portofoliul va fi evaluat de profesoara/profesorul tău.

Părinții sau alte persoane vor studia și vor aprecia rezultatele muncii tale.

SUGESTII PENTRU A REUȘI

- Ai nevoie de o mapă sau un dosar, coli de scris albe și colorate.
- Scrie data pe fiecare lucrare.
- Lucrările pot fi: rezolvări ale unor probleme și exerciții, probleme alcătuite de tine la tema vizată, lucrări originale de sinteză sau investigare matematică, reprezentări grafice realizate manual sau digital, fotografii sau schițe ale unor situații care pot fi modelate matematic, desene cu figuri și configurații geometrice ce respectă anumite cerințe, modele 3D confecționate pentru ilustrarea unor noțiuni, fișe de analiză a unor funcții, capturi din aplicații matematice însoțite de explicații, chestionare de autoevaluare, fișe de progres etc.
- Asigură-te că ai așezat în portofoliu lucrările cele mai interesante.
- Completează portofoliul la timp.

Lecția L1.3

Reducerea la absurd

Amintește-ți!

Ai văzut deja că, pentru a demonstra că o afirmație de tip „$\forall x, P(x)$” este *falsă*, este suficient să găsești un singur contraexemplu (L1.2).
Dar cum demonstrezi că o afirmație este *adevărată*? Una dintre cele mai elegante metode poartă numele de *reducere la absurd*.

Observă și descoperă!

1 Dorim să demonstrăm că nu există cel mai mare număr natural.
Presupunem contrariul: există un cel mai mare număr natural, notat n. Dar numărul $n+1$ este natural și este mai mare decât n, ceea ce contrazice presupunerea că n era cel mai mare.
Prin urmare, nu există cel mai mare număr natural.

a) Care este afirmația demonstrată?

b) Care este presupunerea făcută prin reducere la absurd?

c) Care este contradicția obținută?

2 Analizează următorul tipar de raționament. Maria afirmă: „Dacă plouă, atunci strada este udă.” Andrei se uită afară: strada nu este udă. Discută cu colegul: ce poate concluziona Andrei despre vreme?

★ Important!

Metoda reducerii la absurd este o metodă de demonstrație care funcționează astfel.
Ai de demonstrat o afirmație A. În loc să o demonstrezi direct, urmezi pașii:

1. **Presupui** că A este *falsă* (adică presupui $\neg A$).
2. **Deduci** consecințe logice ale presupunerii $\neg A$.
3. **Ajungi** la o contradicție: o afirmație evident falsă sau o afirmație care contrazice o ipoteză cunoscută.
4. **Concluzionezi** că $\neg A$ este falsă, deci A este adevărată.

Schema raționamentului.



De ce funcționează? Pe baza tabelului de adevăr al implicației: dacă $\neg A \Rightarrow B$, iar B este falsă, atunci $\neg A$ trebuie să fie falsă. Așadar, A este adevărată.

Exemplu clasic. $\sqrt{2}$ este număr irațional.
Demonstrație prin reducere la absurd.

- *Presupunem* că $\sqrt{2}$ ar fi rațional, deci $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, cu $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ și fracția ireductibilă: $\text{cmmdc}(p,q) = 1$.
- Ridicăm la pătrat: $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$, deci $p^2 = 2q^2$.
- Așadar p^2 este număr par. Cum pătratul unui număr impar este impar, deducem că p este par. Scriem $p = 2k$, cu $k \in \mathbb{Z}$.
- Înlocuim: $(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$.
- Așadar q^2 este par, deci și q este par.
- Dar atunci p și q sunt numere pare, deci $\text{cmmdc}(p,q) \geq 2$. Contradicție cu ipoteza că fracția era ireductibilă.

Așadar presupunerea era falsă: $\sqrt{2}$ *nu* este rațional. □

Bine de știut!

Metoda reducerii la absurd se folosește mai ales când:

- afirmația spune că „nu există” un obiect cu o anumită proprietate;
- afirmația este de tipul „nu se poate ca…”;
- demonstrația directă pare imposibilă sau foarte complicată.

Cheia este să formulezi corect negarea afirmației: aici vei folosi regulile de negare din L1.2.

Exersează!

3 În demonstrația faptului că $\sqrt{2}$ este irațional, din caseta „Important!”, identifică:

a) afirmația de demonstrat;

b) ipoteza absurdă;

c) contradicția obținută.

4 Formulează ipoteza absurdă pe care ai face-o pentru a demonstra prin reducere la absurd fiecare dintre următoarele afirmații:

a) „Nu există un cel mai mare număr natural.”

b) „Mulțimea numerelor prime este infinită.”

c) „Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dacă n^2 este par, atunci n este par.”

5 Demonstrează prin reducere la absurd că $\sqrt{3}$ este număr irațional. (Indicație: urmează pașii din exemplul cu $\sqrt{2}$, folosind divizibilitatea cu 3 în locul argumentului de paritate: dacă 3 nu divide p, atunci $p = 3k+1$ sau $p = 3k+2$, iar p^2 dă restul 1 la împărțirea cu 3.)

6 **Portofoliu.** Demonstrează prin reducere la absurd că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dacă n^2 este par, atunci n este par. (Indicație: presupune că n este impar, deci $n = 2k+1$, și calculează n^2.)

7 Demonstrează că numărul $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ este irațional.

8 Demonstrează că suma dintre un număr rațional și un număr irațional este un număr irațional.

9 Precizează valoarea de adevăr a propoziției: „Suma a două numere iraționale este un număr irațional.”

10 Considerăm numerele reale a, b, c care îndeplinesc condiția $a+b+c<21$. Arată că cel puțin unul este mai mic decât 7.

11 Considerăm $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Arată că numărul $a = \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{10!}$ nu este număr întreg.

12 Demonstrează că mulțimea numerelor prime are o infinitate de elemente.

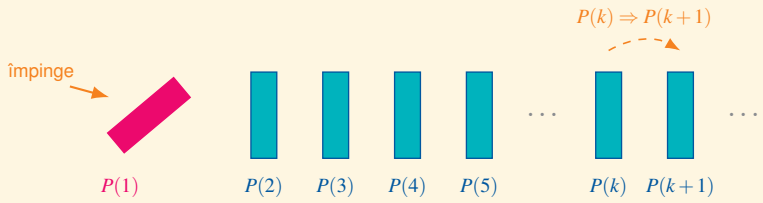
13 Demonstrează că, dacă $a, b \in \mathbb{Q}$ au proprietatea că $a+b\sqrt{2}=0$, atunci $a=b=0$.

Lecția L1.4

Metoda inducției matematice

Amintește-ți!

Imaginează-ți un șir nesfârșit de piese de domino așezate în picioare, una lângă alta. Dacă sunt amplasate destul de aproape, este suficient să împingi prima piesă pentru ca toate să cadă, una după alta.



Acest principiu fizic este modelul intuitiv al *inducției matematice*: o metodă de a demonstra că o proprietate este adevărată pentru *o infinitate de numere naturale*, verificând doar două lucruri:

- proprietatea este adevărată pentru primul număr (împinge prima piesă);
- dacă este adevărată pentru un număr oarecare, atunci este adevărată și pentru următorul (orice piesă o doboară pe următoarea).

1 Discută cu colegul de bancă: dacă lipsește o piesă din șir, mai cad toate piesele de după ea? Ce concluzie tragi?

Observă și descoperă!

Privește predicatul $P(n)$: „$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$”, cu $n \in \mathbb{N}^*$.

2 Verifică valoarea de adevăr a lui $P(n)$ pentru primele patru valori, completând tabelul:

n	**Suma** $1+2+\cdots+n$	**Formula** $\dfrac{n(n+1)}{2}$	$v(P(n))$
1	1	$\dfrac{1\cdot 2}{2}=1$	
2			
3			
4			

3 Discută cu colegul de bancă: ai verificat că $P(n)$ este adevărată pentru $n \in \{1,2,3,4\}$. Putem afirma că $P(n)$ este adevărată *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$? De ce nu este de ajuns să verificăm pentru câteva valori?

4 Privește predicatul $Q(n)$: „n^2+n+41 este număr prim”. Verifică dacă $Q(n)$ este adevărată pentru $n \in \{0,1,2,3,4\}$. Apoi verifică pentru $n=40$. Ce observi?

★ Important!

Metoda inducției matematice. Fie $n_0 \in \mathbb{N}$ fixat și $P(n)$ un predicat care depinde de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Dacă:

1. **(Pas de bază)** $P(n_0)$ este adevărată,
2. **(Pas inductiv)** pentru orice $k \geq n_0$, dacă $P(k)$ este adevărată, atunci $P(k+1)$ este adevărată,

atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq n_0$.

Structura unei demonstrații prin inducție matematică.

1. **Pasul de bază (verificarea).** Verifici că $P(n_0)$ este adevărată (de obicei $n_0=1$ sau $n_0=0$).
2. **Pasul inductiv.**
   - *Ipoteza inductivă:* presupui că $P(k)$ este adevărată pentru un $k \geq n_0$ oarecare.
   - *Demonstrația pentru $P(k+1)$:* presupunând adevărată $P(k)$, demonstrezi $P(k+1)$.
3. **Concluzia.** „Conform metodei inducției matematice, $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$.”

Exemplu rezolvat. Demonstrează prin inducție matematică formula:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pasul de bază ($n=1$). Membrul stâng: 1. Membrul drept: $\dfrac{1\cdot 2}{2}=1$. Egalitatea este adevărată.
Pasul inductiv. Presupunem că $P(k)$ este adevărată, adică

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}. \qquad \text{(ipoteza inductivă)}$$

Demonstrăm $P(k+1)$: $1+2+\cdots+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

$$\underbrace{1+2+\cdots+k}_{=\frac{k(k+1)}{2}\ \text{din ipoteza inductivă}}+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)$$

$$=(k+1)\cdot\frac{k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Concluzia. Conform metodei inducției matematice, $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Bine de știut!

Atenție. Verificarea pe câteva cazuri particulare *nu este o demonstrație*.
Considerăm predicatul $R(n)$: „$2n+1$ este număr prim”, $n \in \mathbb{N}^*$. Propozițiile $R(1)$, $R(2)$, $R(3)$ sunt adevărate, dar $R(4)$ este falsă. O demonstrație prin inducție (pasul de bază și pasul inductiv) te scutește de o astfel de surpriză: ea garantează adevărul pentru *toate* numerele naturale $n \geq n_0$, nu doar pentru cele verificate. (Pentru predicatul de mai sus, pasul inductiv nu poate fi demonstrat.)

Aplicație digitală

Verifică formule de tip $1+2+\cdots+n$ pentru valori mari ale lui n, folosind o foaie de calcul (Google Sheets, Excel sau LibreOffice Calc):

- În coloana A scrie $1, 2, 3, \ldots, 100$.
- În coloana B, în celula $B1$ pune `=A1`; în $B2$ pune `=B1+A2`; copiază formula în jos. Coloana B conține sumele parțiale.
- În coloana C, în celula $C1$ pune `=A1*(A1+1)/2` și copiază formula în jos.
- Compară: ar trebui să obții aceleași valori în coloanele B și C.

Astfel verifici experimental, dar reține: doar inducția demonstrează că egalitatea este valabilă pentru *orice* n.

	A	B	C
1	1	=A1	=A1*(A1+1)/2
2	2	=B1+A2	=A2*(A2+1)/2
3	3	=B2+A3	=A3*(A3+1)/2
4	4	=B3+A4	=A4*(A4+1)/2
5	5	=B4+A5	=A5*(A5+1)/2
6	6	=B5+A6	=A6*(A6+1)/2
7	7	=B6+A7	=A7*(A7+1)/2
8	8	=B7+A8	=A8*(A8+1)/2
9	9	=B8+A9	=A9*(A9+1)/2
10	10	=B9+A10	=A10*(A10+1)/2
11	11	=B10+A11	=A11*(A11+1)/2
12	12	=B11+A12	=A12*(A12+1)/2
13	13	=B12+A13	=A13*(A13+1)/2
14	14	=B13+A14	=A14*(A14+1)/2
15	15	=B14+A15	=A15*(A15+1)/2
16	16	=B15+A16	=A16*(A16+1)/2
17	17	=B16+A17	=A17*(A17+1)/2
92	92	=B91+A92	=A92*(A92+1)/2
93	93	=B92+A93	=A93*(A93+1)/2
94	94	=B93+A94	=A94*(A94+1)/2
95	95	=B94+A95	=A95*(A95+1)/2
96	96	=B95+A96	=A96*(A96+1)/2
97	97	=B96+A97	=A97*(A97+1)/2
98	98	=B97+A98	=A98*(A98+1)/2
99	99	=B98+A99	=A99*(A99+1)/2
100	100	=B99+A100	=A100*(A100+1)/2
101			

	A	B	C
1	1	1	1
2	2	3	3
3	3	6	6
4	4	10	10
5	5	15	15
6	6	21	21
7	7	28	28
8	8	36	36
9	9	45	45
10	10	55	55
11	11	66	66
12	12	78	78
13	13	91	91
14	14	105	105
15	15	120	120
16	16	136	136
17	17	153	153
92	92	4278	4278
93	93	4371	4371
94	94	4465	4465
95	95	4560	4560
96	96	4656	4656
97	97	4753	4753
98	98	4851	4851
99	99	4950	4950
100	100	5050	5050
101			

Exersează!

5 Se consideră predicatul $P(n)$: „$2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$”, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Verifică $P(1)$ (pasul de bază).

b) Scrie $P(k)$ și $P(k+1)$.

c) Demonstrează $P(k+1)$ pornind de la $P(k)$.

6 Pentru afirmația „Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, suma $1^2+2^2+\cdots+n^2$ este egală cu $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$”, identifică:

a) predicatul $P(n)$;

b) pasul de bază (ce trebuie verificat);

c) ipoteza inductivă (ce se presupune);

d) ce trebuie demonstrat în pasul inductiv.

7 Pentru fiecare situație, formulează predicatul $P(n)$ și pasul de bază:

a) Suma primelor n numere impare este n^2.

b) $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

8 Demonstrează prin inducție matematică formula

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Model de rezolvare — pasul de bază

Pentru $n=1$, membrul stâng este 1, iar membrul drept este $1^2=1$. Egalitatea este adevărată.

9 Demonstrează prin inducție matematică formula

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

10 Demonstrează prin inducție formula

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},\qquad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

11 Demonstrează prin inducție matematică egalitățile:

a) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

b) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

c) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(4n^2-1),\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

d) $1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+\cdots+n(2n+1)=\dfrac{1}{6}n(n+1)(4n+5),\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

e) $\dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{2^n}=1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1),\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

12 Demonstrează prin inducție matematică egalitățile:

a) $\dfrac{1}{1\cdot 8}+\dfrac{1}{8\cdot 15}+\cdots+\dfrac{1}{(7n-6)(7n+1)}=\dfrac{n}{7n+1},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

b) $\dfrac{1}{1\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\dfrac{n}{5n+1},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

c) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

d) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\dfrac{3^2}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

e) $1+2\cdot 4+3\cdot 4^2+\cdots+n\cdot 4^{n-1}=\dfrac{(3n-1)\cdot 4^n+1}{9},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

f) $1-2\cdot 3+3\cdot 3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n\cdot 3^{n-1}=\dfrac{(-1)^{n+1}(4n+1)\cdot 3^n+1}{16},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

13 Demonstrează prin inducție matematică inegalitățile:

a) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\le\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2n+2},\quad \forall n\in\mathbb{N},\ n\ge 2$

b) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\ge\dfrac{13}{24},\quad \forall n\in\mathbb{N},\ n\ge 2$

c) $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}\le\dfrac{2}{3}(n+1)\sqrt{n},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

d) $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}\ge\dfrac{2}{3}n\sqrt{n+1},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

e) $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}},\quad \forall n\in\mathbb{N},\ n\ge 2$

f) $2^n\ge n+1,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

g) $2^n\ge n^2,\quad \forall n\in\mathbb{N},\ n\ge 5$

h) $3^{n+1}\ge 3n^2+2n+1,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

14 Demonstrează prin inducție matematică propozițiile:

a) $n^3+11n\vdots 6,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

b) $3^n+2n-1\vdots 4,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

c) $4^n+6n+8\vdots 9,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

d) $3^{2n+1}+2^{n+2}\vdots 7,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

15 **Portofoliu.** Demonstrează prin inducție matematică inegalitatea lui Bernoulli:

$$(1+x)^n\ge 1+nx,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\ge -1.$$

Discută: când inegalitatea devine egalitate?

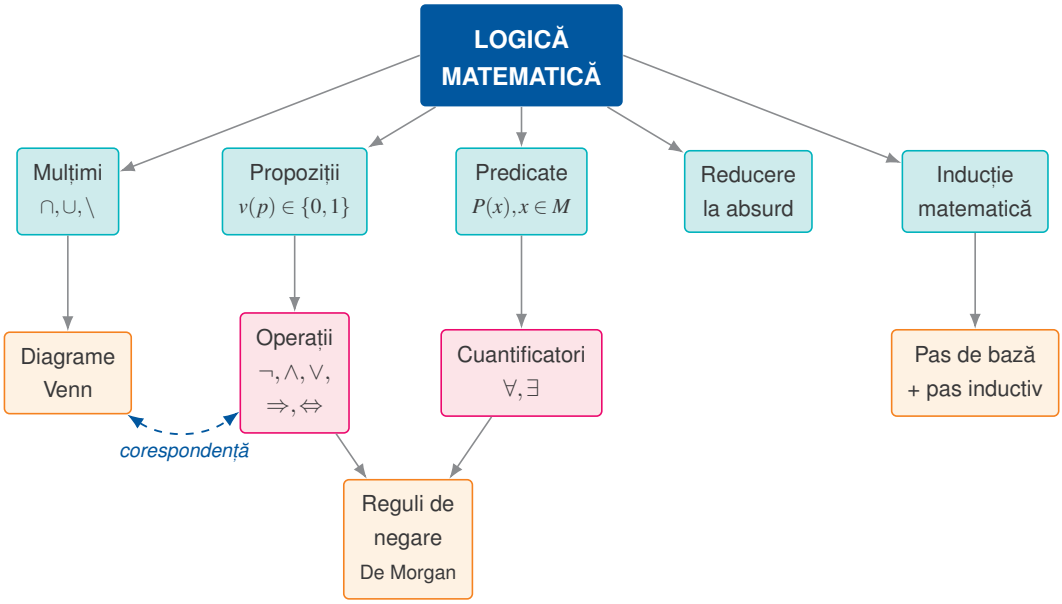
16 Demonstrează prin inducție matematică inegalitatea: pentru $x>0$, $y>0$,

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\le\frac{x^n+y^n}{2},\qquad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

În ce caz inegalitatea devine egalitate?

Recapitulare

Hartă conceptuală



De reținut!

La finalul acestei unități trebuie să poți:

- recunoaște o propoziție matematică și determina valoarea ei de adevăr;
- identifica propozițiile elementare din care este alcătuit un enunț matematic și preciza operatorul logic care le leagă;
- alcătui și folosi tabelele de adevăr pentru $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$;
- lucra cu predicate, recunoaște și folosi cuantificatorii $\forall$ și $\exists$;
- aplica regulile de negare a propozițiilor compuse și a celor cu cuantificatori (legile lui De Morgan);
- recunoaște corespondența dintre operațiile logice și operațiile cu mulțimi: „și” $\leftrightarrow \cap$, „sau” $\leftrightarrow \cup$, „non” $\leftrightarrow$ complementara;
- folosi metoda *reducerii la absurd* pentru a demonstra un enunț;
- aplica *inducția matematică* pentru a demonstra o proprietate care depinde de $n \in \mathbb{N}$.

Sarcini de sinteză

Exersează!

1. Identifică propozițiile elementare și operatorul logic din fiecare enunț. Precizează valoarea de adevăr a fiecărui enunț.
   a) „3 este număr prim și 4 este pătrat perfect.”
   b) „Dacă $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, atunci $\frac{2}{3} \in \mathbb{R}$.”
2. Scrie negarea fiecărui enunț:
   a) „$\forall n \in \mathbb{N},\ n+1 > n$.”
   b) „$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2+1 = 0$.”
   c) „2 este prim sau 4 este pătrat perfect.”
3. Demonstrează prin reducere la absurd că $\sqrt{5}$ nu este număr rațional.
4. Demonstrează prin inducție matematică:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

5. **Sinteză.** Andrei afirmă: „Pentru orice număr natural n, n^2+n este par.”
   a) Maria îl crede, dar îi spune că trebuie să demonstreze afirmația, nu doar să o verifice. De ce?
   b) Demonstrează afirmația lui Andrei, prin inducție matematică sau printr-un raționament direct.
   c) Reformulează afirmația folosind cuantificatori și operatori logici.

OBSERV!

Bifează răspunsul care ți se potrivește, gândindu-te la această unitate de învățare. Folosește această fișă de observare pe măsură ce parcurgi unitățile de învățare din manual.

Comportamentul	Niciodată	Uneori	Deseori	Întotdeauna
Am participat cu interes la lecții.				
Am respectat instrucțiunile.				
Am finalizat sarcinile.				
Mi-am spus părerea.				
Când am greșit, am vrut să aflu cum pot să corectez.				
Am cerut ajutor când am avut nevoie.				

Evaluare — Unitatea 1

30 de minute · 90 p + 10 p din oficiu

Subiectul I (25 de puncte)

1. **(10 p)** Bifează caseta corespunzătoare răspunsului corect. Pentru propozițiile p: „$3 < 5$” și q: „$\sqrt{4} = 3$”, valoarea de adevăr a propoziției $p \wedge \neg q$ este:

☐ 1 ☐ 0

2. **(15 p)** Asociază fiecare expresie din coloana *A* cu citirea corectă din coloana *B*.

A	B
1) $p \Rightarrow q$	a) „p și q”
2) $p \wedge q$	b) „p dacă și numai dacă q”
3) $p \Leftrightarrow q$	c) „dacă p, atunci q”
4) $\neg p$	d) „non p”
	e) „p sau q”

Subiectul II (30 de puncte)

3. **(15 p)** Scrie negarea propoziției:

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0.$

Precizează valoarea de adevăr a propoziției inițiale și valoarea de adevăr a negării acesteia.

4. **(15 p)** Determină valoarea de adevăr a enunțului

$$(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 0) \wedge (\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 = 4)$$

Subiectul III (35 de puncte)

5. **(15 p)** Demonstrează prin inducție matematică egalitatea:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

6. **(20 p)** Prin reducere la absurd, arată că $\sqrt{2}$ este număr irațional.

Indicație: presupune că $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, cu $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ și $\text{cmmdc}(p,q) = 1$, apoi obține o contradicție cu ipoteza că fracția este ireductibilă.

Notă: 10 puncte se acordă din oficiu. Total: 100 de puncte. Timp de lucru: 30 de minute.

Exersezi, corectezi, progresezi

Pentru fiecare dintre cele două probleme de la subiectul III, ai aici sarcini pe trei niveluri: **Ameliorare**, **Echivalent** și **Dezvoltare**. În funcție de rezultatul obținut la test, începe cu nivelul potrivit și continuă cu următoarele.

Pentru subiectul III, itemul 5 (inducție matematică)

Ameliorare

Pas cu pas, refă demonstrația din test.

1. Verifică egalitatea $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ pentru $n=1,2,3,4$ (calcul direct, fără demonstrație generală).
2. Acum reia demonstrația prin inducție, urmând pașii:
   a) Verifică pentru $n=1$: cât este membrul stâng? Dar membrul drept?
   b) Scrie ipoteza inductivă: ce presupui pentru $n=k$?
   c) Adaugă $(k+1)$ la ambii membri ai ipotezei și prelucrează membrul drept.
   d) Verifică dacă ai obținut $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Echivalent

3. Demonstrează prin inducție matematică egalitatea

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Indicație pentru pasul inductiv: pornește de la ipoteza $1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. *Adaugă* $(k+1)^2$ *la ambii membri. Prelucrează membrul drept ca să obții* $\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Dezvoltare

4. Folosind inducția matematică, demonstrează *inegalitatea lui Bernoulli*:

$$(1+x)^n\geq 1+nx,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\geq -1.$$

   a) Verifică pasul de bază pentru $n=1$.
   b) Pornind de la ipoteza inductivă $(1+x)^k\geq 1+kx$, înmulțește ambii membri cu $(1+x)\geq 0$ și dedu $(1+x)^{k+1}\geq (1+kx)(1+x)$.
   c) Dezvoltă produsul $(1+kx)(1+x)$ și arată că este $\geq 1+(k+1)x$.
   d) Discută: când inegalitatea devine egalitate?

Pentru subiectul III, itemul 6 (reducere la absurd)

Ameliorare

Recapitulează structura raționamentului prin reducere la absurd.

1. În demonstrația din test a faptului că $\sqrt{2}$ este irațional, identifică:
   a) afirmația A pe care vrei să o demonstrezi;
   b) negarea $\neg A$ pe care o presupui adevărată;
   c) contradicția obținută.
2. Refă, pas cu pas, demonstrația din caseta „Important!” (lecția L1.3), explicând cu propriile cuvinte fiecare pas.

Echivalent

3. Prin reducere la absurd, demonstrează că $\sqrt{3}$ este număr irațional.
   Indicație: presupune că $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, *cu* $\text{cmmdc}(p,q) = 1$. *Ridică la pătrat și dedu că* p^2 *este divizibil cu* 3. *Folosește faptul că, dacă* p^2 *este divizibil cu* 3, *atunci* p *este divizibil cu* 3. *Continuă și obține contradicția cu* $\text{cmmdc}(p,q) = 1$.

Dezvoltare

Mulțimea numerelor prime este infinită.

4. Demonstrează prin reducere la absurd că există o infinitate de numere prime.
   Indicație (Euclid):
   a) Presupune că ar exista doar un număr finit de numere prime: $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
   b) Construiește numărul $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$.
   c) Arată că N nu este divizibil cu niciunul dintre $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
   d) Așadar, N fie este prim, fie are un divizor prim diferit de $p_1, \ldots, p_n$. În ambele cazuri, există un număr prim diferit de cele n presupuse — contradicție.

Autoevaluare

Bifează enunțurile care descriu ce poți face singur, fără ajutor:

- ☐ Recunosc o propoziție matematică și pot stabili dacă este adevărată sau falsă.
- ☐ Pot identifica propozițiile elementare dintr-un enunț matematic și pot recunoaște operatorul logic care le leagă.
- ☐ Pot calcula valoarea de adevăr a unei expresii cu operatori logici, folosind tabelele de adevăr.
- ☐ Pot scrie un enunț cu cuantificatori în limbaj formal, plecând de la formularea în limbaj curent.
- ☐ Pot nega corect un enunț cu cuantificatori, aplicând regulile de negare.
- ☐ Recunosc corespondența dintre operațiile logice și operațiile cu mulțimi („și” $\leftrightarrow \cap$, „sau” $\leftrightarrow \cup$).
- ☐ Recunosc structura unei demonstrații prin reducere la absurd: afirmația, ipoteza absurdă, contradicția.
- ☐ Pot demonstra prin reducere la absurd că un număr de forma $\sqrt{p}$ (cu p prim) este irațional.
- ☐ Recunosc structura unei demonstrații prin inducție matematică: pasul de bază și pasul inductiv.
- ☐ Pot demonstra prin inducție matematică o egalitate de tipul $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.
- ☐ Pot explica unui coleg de ce verificarea pe câteva cazuri particulare nu este o demonstrație.

Cum interpretezi rezultatul?

- Dacă ai bifat **10–11 enunțuri**: stăpânești conținutul unității. Felicitări! Treci cu încredere la U2.
- Dacă ai bifat **6–9 enunțuri**: ești pe drumul cel bun. Reia sarcinile de tip „Echivalent” din secțiunea „Exersezi, corectezi, progresezi” înainte de a începe U2.
- Dacă ai bifat **0–5 enunțuri**: solicită sprijinul profesorului. Reia sarcinile de tip „Ameliorare” din secțiunea „Exersezi, corectezi, progresezi” împreună cu un coleg cu care lucrezi bine.

Reflectează:

- Care a fost cea mai utilă noțiune din această unitate? De ce?
- În care lecție ai întâmpinat cele mai multe dificultăți? La ce te poate ajuta colegul de bancă?
- Cum poți folosi limbajul logic în alte discipline (română, științe, informatică)?

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE

U2

Șiruri și progresii

> *„Matematica este clasificarea și studiul tuturor tiparelor posibile.”* — *W. W. Sawyer,* Prelude to Mathematics *(1955)*

Lecțiile unității

- L2.1 — Șiruri. Moduri de definire a unui șir
- L2.2 — Progresii aritmetice
- L2.3 — Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice
- L2.4 — Progresii geometrice
- L2.5 — Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice. Aplicație: $a^n - b^n$
- L2.6 — Aplicații ale șirurilor și progresiilor în contexte practice
- Recapitulare · Investigație · Evaluare · Exersezi, corectezi, progresezi · Autoevaluare

Ce vei învăța

- să recunoști elementele unui șir și ale unei progresii;
- să calculezi termeni și sume ale progresiilor;
- să aplici formulele termenului general și ale sumei;
- să traduci în limbaj matematic situații din viața de zi cu zi;
- să alegi tipul de progresie potrivit unei situații;
- să modelezi fenomene cu ajutorul șirurilor și progresiilor.



Lecția L2.1

Șiruri. Moduri de definire a unui șir

Amintește-ți!

În gimnaziu ai întâlnit deja secvențe de numere ordonate: $1,2,3,4,\ldots$ (numerele naturale), $2,4,6,8,\ldots$ (numerele pare), $1,4,9,16,\ldots$ (pătratele perfecte). Toate au în comun ceva: o regulă care îți spune cum se formează termenul următor.

1 Continuă fiecare succesiune cu încă trei termeni:

a) $1,3,5,7,\ldots$

b) $1,2,4,8,16,\ldots$

c) $1,1,2,3,5,8,\ldots$

2 Discută cu colegul de bancă: cum ai descris regula la fiecare punct? Care a fost cea mai dificilă?

Observă și descoperă!

Andrei își planifică antrenamentele de fitness pentru următoarele 10 săptămâni. În prima săptămână face 30 de minute de mișcare zilnic. În fiecare săptămână adaugă câte 5 minute la timpul zilnic.

3 Completează tabelul cu timpul zilnic de mișcare în fiecare săptămână:

Săptămâna	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Minute	30	35								

4 Notează cu a_n timpul zilnic de mișcare al lui Andrei în săptămâna n. Cum se calculează a_n, dacă $a_1 = 30$? Scrie o formulă care exprimă a_n în funcție de n.

5 Maria preferă o altă strategie: începe cu 30 de minute, dar în fiecare săptămână *dublează* timpul. Calculează câte minute de mișcare va face zilnic Maria în săptămâna a 5-a. Compară cu Andrei: la care strategie timpul crește mai repede?

★ Important!

Definiție. Numim *șir de numere reale* o funcție $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ (sau $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$). Valoarea $a(n)$ se notează a_n și se numește *termenul de rang n* al șirului. Notăm șirul prin $(a_n)_{n\geq 1}$ (respectiv $(a_n)_{n\geq 0}$, dacă $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$).

Moduri de definire a unui șir.

1. **Prin formulă explicită (termenul general).** Se indică cum se calculează a_n direct, în funcție de n.

Exemplu: $a_n = 2n+1$ definește șirul $3,5,7,9,11,\ldots$

2. **Prin formulă de recurență.** Se indică primii termeni și o regulă care exprimă a_{n+1} în funcție de termenii anteriori.
   Exemplu: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 2$ definește același șir $3,5,7,9,11,\ldots$
3. **Prin descriere.** Se indică proprietatea pe care o îndeplinește termenul a_n.
   Exemplu: a_n este al n-lea număr prim. Așadar: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, ...

Atenție la indici. Convenția pe care o folosim este:

- a_1 este *primul* termen, a_2 al doilea, ..., a_n termenul de rang n;
- uneori indexarea începe de la $n = 0$. Vom preciza explicit acest lucru.

Bine de știut!

Cum trec de la o formă la alta?

- De la *recurență* la *termen general*: calculezi câțiva termeni, observi tiparul, scrii formula, o verifici pentru rangurile mici și apoi o demonstrezi prin inducție matematică (vezi L1.4).
- De la *termen general* la *recurență*: calculezi $a_{n+1} - a_n$ sau (dacă toți termenii sunt nenuli) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ și observi dacă rezultatul depinde de n sau este constant.

Aplicație digitală

Vizualizează rapid un șir folosind o foaie de calcul (Google Sheets, Excel sau LibreOffice Calc):

- În coloana A scrie $1,2,3,\ldots,30$ (rangurile).
- În coloana B scrie formula a_n pe care vrei să o explorezi: de exemplu, în $B1$ scrie `=2*A1+1` și copiază în jos.
- Selectează ambele coloane și inserează un grafic de tip *coloane* sau *puncte*.

Schimbă formula și observă cum se schimbă graficul. Care șir crește mai repede: $a_n = 2n+1$ sau $a_n = 2^n$? Verifică experimental până la $n = 10$.

Exersează!

Identifică elemente ale unui șir

6 Pentru fiecare șir, scrie primii cinci termeni:

a) $a_n = 3n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $b_n = (-1)^n \cdot n$, $n \in \mathbb{N}^*$;

c) $c_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

7 Se consideră șirul:

$$2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ \ldots$$

a) Scrie următorii trei termeni ai șirului.

b) Observă legătura dintre rangul unui termen și valoarea acestuia.

c) Scrie o formulă posibilă pentru termenul general a_n.

8 Pentru fiecare dintre șirurile următoare, precizează dacă termenii cresc, descresc sau nu respectă o singură tendință:

a) $3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ \ldots$

b) $20,\ 17,\ 14,\ 11,\ 8,\ \ldots$

c) $1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots$

d) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots$

9 Completează spațiile libere, după regula sugerată de primii termeni:

a) $7,\ 11,\ 15,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots$

b) $81,\ 27,\ 9,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots$

c) $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots$

d) $2,\ 6,\ 12,\ 20,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots$

10 Scrie primii șase termeni ai șirului definit prin recurență: $x_1 = 2,\ x_{n+1} = 3x_n - 1$.

11 Se consideră șirul definit prin:

$$a_n = n^2 - n + 1, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Calculează primii cinci termeni ai șirului.

b) Verifică dacă numerele 13, 20 și 31 sunt termeni ai șirului.

c) Pentru numerele care sunt termeni ai șirului, precizează rangul acestora.

12 Se consideră șirul definit prin recurență:

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = a_n + 2n, \quad n \geq 1.$$

a) Calculează a_2, a_3, a_4 și a_5.

b) Explică în cuvinte cum se obține fiecare termen nou.

c) Compară acest șir cu un șir în care se adaugă de fiecare dată același număr.

13 Un șir este definit astfel: primul termen este 10, iar fiecare termen următor se obține scăzând 3 din termenul precedent.

a) Scrie primii șase termeni ai șirului.

b) Definește șirul printr-o formulă de recurență.

c) Scrie o formulă pentru termenul general a_n.

14 Se consideră șirul:

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$$

a) Scrie următorii trei termeni ai șirului.

b) Scrie o formulă pentru termenul general a_n.

c) Compară termenii șirului cu numărul 1. Ce observi?

Transpune o situație în limbaj matematic

15 Mihai are într-un cont de economii suma de 500 de lei. Lunar adaugă câte 80 de lei.

a) Notează cu a_n suma din cont la finalul lunii n. Calculează a_1, a_2, a_3, a_4.

b) Scrie o formulă pentru a_n în funcție de n.

c) Calculează suma din cont la finalul lunii a 12-a.

Model de rezolvare — punctul a): La finalul lunii 1: $a_1 = 500 + 80 = 580$. La finalul lunii 2: $a_2 = 580 + 80 = 660$. La finalul lunii 3: $a_3 = 740$. La finalul lunii 4: $a_4 = 820$.

16 O sală are scaune așezate pe rânduri. Pe primul rând sunt 6 scaune, pe al doilea rând sunt 8 scaune, pe al treilea rând sunt 10 scaune, iar regula continuă la fel.

a) Notează cu a_n numărul de scaune de pe rândul n. Scrie primii cinci termeni ai șirului.

b) Scrie o formulă pentru a_n.

c) Câte scaune sunt pe rândul al 12-lea?

d) Pe ce rând sunt 40 de scaune?

17 Construiește exemple de șiruri care respectă cerințele următoare:

a) un șir cu termeni naturali, definit printr-o formulă explicită;

b) un șir cu termeni fracționari, definit printr-o formulă explicită;

c) un șir definit prin recurență, în care fiecare termen, începând cu al doilea, se obține prin dublarea termenului precedent;

d) un șir ale cărui semne alternează de la un termen la altul.

18 Se consideră șirul definit prin:

$$u_1 = 2, \quad u_2 = 5, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n, \quad n \geq 1.$$

a) Calculează primii șapte termeni ai șirului.

b) Observă diferența dintre doi termeni consecutivi.

c) Scrie formula explicită a termenului general u_n.

19 Andreea își urmărește numărul zilnic de pași cu ajutorul unei aplicații de fitness. În prima zi a făcut 5 000 de pași și își propune să mărească în fiecare zi numărul de pași cu 200.

a) Câți pași va face în ziua a 10-a?

b) În ce zi va atinge pentru prima dată 10 000 de pași?

Identifică formule de recurență

20 Pentru fiecare șir, scrie o formulă de recurență (precizează primul termen și regula de calcul pentru a_{n+1}):

a) $5, 8, 11, 14, 17, \ldots$

b) $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

c) $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$

21 **Portofoliu.** Șirul lui Fibonacci este definit prin: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ și $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pentru orice $n \geq 1$. Scrie primii zece termeni. Caută informații despre fenomene sau procese naturale care au legătură cu acest șir sau a căror evoluție poate fi modelată de acest șir (poți folosi un motor de căutare).

Lecția L2.2

Progresii aritmetice

Amintește-ți!

În L2.1 ai văzut că șirurile pot fi descrise în mai multe feluri. Cazul cel mai simplu este cel în care fiecare termen se obține din precedentul *adăugând aceeași cantitate*. Așa funcționează planul lui Andrei (5 minute în plus pe săptămână) sau economiile lui Mihai (80 de lei pe lună).

1. Pentru șirul $4, 7, 10, 13, 16, \ldots$, calculează diferențele $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$, $a_5 - a_4$. Ce observi?
2. Pentru șirul $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$, calculează aceleași diferențe. Ce concluzie tragi?

Observă și descoperă!

Mihai depune lunar 80 de lei într-un cont de economii. La început avea 500 de lei. Notăm cu a_n suma din cont la finalul lunii n.

3. Calculează a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Pentru fiecare pereche de termeni consecutivi, calculează diferența $a_{n+1} - a_n$. Ce observi?
4. Acum ia oricare trei termeni consecutivi, de exemplu a_2, a_3, a_4. Calculează $\dfrac{a_2 + a_4}{2}$. Compară cu a_3. Verifică pentru încă un grup de trei termeni consecutivi.
5. Discută cu colegul: care este legătura dintre termenul „din mijloc” și „vecinii” lui în acest șir?

★ Important!

Definiție. Un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ se numește *progresie aritmetică* dacă există un număr real r, numit *rația progresiei*, astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_{n+1} - a_n = r \quad \text{(echivalent: } a_{n+1} = a_n + r\text{)}.$$

Notație uzuală: faptul că numerele $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sunt în progresie aritmetică se scrie $\div a_1, a_2, a_3, \ldots$ (semnul „$\div$” apare o singură dată, în fața termenilor).

Termenul general. Pentru o progresie aritmetică cu primul termen a_1 și rația r:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot r, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.}$$

Justificare (intuiție inductivă): $a_2 = a_1 + r$; $a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$; $a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$; $\ldots$; $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Caracterizarea unei progresii aritmetice prin trei termeni consecutivi. Pentru orice trei termeni

consecutivi a_{k-1}, a_k, a_{k+1} ai unei progresii aritmetice:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \quad \text{(media aritmetică)}.$$

Reciproc: dacă într-un șir orice trei termeni consecutivi verifică această relație, atunci șirul este progresie aritmetică.

Caracterizare pentru $n \geq 3$ termeni. Numerele $b_1, b_2, \ldots, b_n$ formează (în ordinea dată) o progresie aritmetică dacă și numai dacă, pentru orice $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$:

$$b_k = \frac{b_{k-1} + b_{k+1}}{2}.$$

Bine de știut!

Recunoaște repede o progresie aritmetică:

- calculezi diferența primilor doi termeni: $r = a_2 - a_1$;
- verifici că diferența se păstrează: $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$ etc.

Dacă $r > 0$, progresia este *crescătoare*; dacă $r < 0$, este *descrescătoare*; dacă $r = 0$, progresia este *constantă*.

Exersează!

Recunoaște o progresie aritmetică

6 Stabilește dacă șirurile sunt progresii aritmetice. Dacă da, precizează rația și primul termen.

a) $7, 10, 13, 16, 19, \ldots$

b) $5, 3, 1, -1, -3, \ldots$

c) $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

d) $a_n = 4n + 7$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Calcule cu termenul general

7 Într-o progresie aritmetică, $a_1 = 6$ și $r = 5$. Calculează a_{20}.
Model de rezolvare: $a_{20} = a_1 + (20-1) \cdot r = 6 + 19 \cdot 5 = 6 + 95 = 101$.

8 Într-o progresie aritmetică, $a_3 = 11$ și $a_8 = 31$. Calculează a_1 și r.
Model de rezolvare: $a_3 = a_1 + 2r$ și $a_8 = a_1 + 7r$. Scădem: $a_8 - a_3 = 5r$, deci $5r = 31 - 11 = 20$, adică $r = 4$. Atunci $a_1 = a_3 - 2r = 11 - 8 = 3$.

9 Într-o progresie aritmetică, $a_4 = 17$ și $a_{10} = 47$. Calculează termenul a_{25}.

10 Determină rangul termenului 58 într-o progresie aritmetică cu $a_1 = 1$ și $r = 3$.

11 Construiește câte un exemplu de progresie aritmetică în condițiile date. Pentru fiecare caz, scrie primii cinci termeni și precizează rația:

a) primul termen este 4, iar rația este 3;

b) primul termen este 20, iar progresia este descrescătoare;

c) termenii progresiei sunt numere naturale pare;

d) progresia are rația negativă și conține termenul 0.

12 Verifică dacă următoarele șiruri sunt progresii aritmetice. Dacă da, precizează primul termen și rația. Justifică răspunsul prin diferența dintre doi termeni consecutivi.

a) $a_n = 5n+4,\ n \in \mathbb{N}^*$;

b) $b_n = \dfrac{n^2+3}{2},\ n \in \mathbb{N}^*$;

c) $c_n = \dfrac{3n+7}{5},\ n \in \mathbb{N}^*$.

13 Determină valoarea lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele

$$2x-1, \quad 5x+2, \quad 9x-3$$

să fie, în ordinea dată, în progresie aritmetică.

14 Într-o progresie aritmetică, $a_2 = 7$ și $a_6 = 23$.

a) Determină rația progresiei.

b) Calculează primul termen.

c) Calculează termenul a_{15}.

Caracterizarea prin trei termeni consecutivi

15 Determină valoarea lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele $3, x, 11$ să fie, în ordinea dată, în progresie aritmetică.

16 Verifică dacă numerele $-2, 1, 4, 7, 10$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Justifică.

17 Într-o progresie aritmetică, $a_4 + a_8 = 56$ și $a_5 \cdot a_7 = 759$. Determină toate posibilitățile pentru primul termen și pentru rație.

18 Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de rație r. Se definește șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ prin

$$b_n = a_n + a_{n+1}.$$

a) Calculează $b_{n+1} - b_n$.

b) Arată că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică.

c) Precizează rația progresiei $(b_n)_{n\geq 1}$.

19 Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Se definește șirul $(c_n)_{n\geq 1}$ prin

$$c_n = a_n \cdot a_{n+1}.$$

Este întotdeauna șirul $(c_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică? Justifică răspunsul.

Transpunere în limbaj matematic

20 Un abonament la o sală de sport costă 150 de lei pe lună, la care se adaugă o taxă de înscriere de 50 de lei (achitată o singură dată). Notează cu C_n costul total după n luni de abonament.

a) Calculează C_1, C_2, C_3, C_6.

b) Arată că $(C_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică. Care este rația?

c) După câte luni costul total ajunge la 1 250 de lei?

21 **Portofoliu.** Într-o progresie aritmetică, $a_3 + a_7 = 30$ și $a_4 \cdot a_6 = 224$. Determină toate posibilitățile pentru primul termen și pentru rație.

Lecția L2.3

Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice

Amintește-ți!

În unitatea anterioară (U1, L1.4) ai demonstrat prin inducție matematică formula:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Acest rezultat este, de fapt, suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice particulare: cea cu $a_1=1$ și $r=1$.

1 Calculează $1+2+\cdots+100$. (Există o legendă conform căreia, pe când Gauss era copil, profesorul său le-a dat elevilor această sarcină ca să fie ocupați o oră întreagă — iar Gauss a răspuns aproape instant. Cum crezi că a procedat?)

Observă și descoperă!

Maria depune lunar într-un cont sume care formează o progresie aritmetică: 100 de lei în prima lună, 120 de lei în a doua, 140 de lei în a treia etc. (rația $r=20$ de lei).

2 Vrea să afle cât a depus în total în primele 10 luni, fără să adune cele zece numere unul câte unul. Maria scrie suma de două ori, o dată în ordine crescătoare, o dată în ordine descrescătoare, ca în tabelul de mai jos. Adună pe coloane.

Luna	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Crescător	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280
Descrescător	280	260	240	220	200	180	160	140	120	100
Suma pe coloană										

3 Ce observi la sumele din ultima linie? Cu ajutorul lor, calculează rapid suma cerută.

4 Generalizează: dacă o progresie aritmetică are primul termen a_1 și termenul a_n, cât este suma $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$?

★ Important!

Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu primul termen a_1 și rația r. Notăm $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. **Notație.** Suma $a_1+a_2+\cdots+a_n$ se scrie prescurtat $\sum_{k=1}^{n} a_k$ (se citește „suma termenilor a_k, pentru k de la 1 la n”); k se numește *indice de sumare*. De

exemplu, $\sum_{k=1}^{4}(2k-1) = 1+3+5+7 = 16$, iar $\sum_{k=5}^{15} a_k = a_5 + a_6 + \cdots + a_{15}$. Așadar, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Atunci:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.}$$

Demonstrație. Scriem suma în două moduri:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1.$$

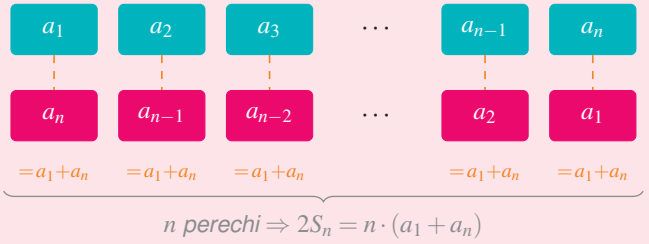
Adunăm cele două egalități, termen cu termen:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_1).$$

Dar pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$a_k + a_{n-k+1} = (a_1 + (k-1)r) + (a_1 + (n-k)r) = 2a_1 + (n-1)r = a_1 + a_n.$$

Vizualizare grafică („trucul lui Gauss”). Fiecare pereche formată dintr-un termen din linia de sus și termenul corespunzător din linia de jos are aceeași sumă: $a_1 + a_n$.



Așadar fiecare paranteză are valoarea $a_1 + a_n$, iar suma are n paranteze:

$$2S_n = n\cdot(a_1 + a_n) \implies S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}. \qquad \square$$

Formă echivalentă. Folosind $a_n = a_1 + (n-1)r$:

$$S_n = \frac{n\big(2a_1 + (n-1)r\big)}{2}.$$

Această formă este utilă când cunoști a_1 și r (dar nu a_n).

Bine de știut!

Cum aleg între cele două formule?

- Dacă cunosc a_1 și a_n: $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$.
- Dacă cunosc a_1 și r: $S_n = \dfrac{n(2a_1 + (n-1)r)}{2}$.
- Dacă cunosc a_n și r: calculez întâi $a_1 = a_n - (n-1)r$, apoi suma.

Aplicație digitală

Verifică formula sumei pe o foaie de calcul.

- În coloana A, scrie rangurile $1, 2, \ldots, 50$.
- În coloana B, scrie termenii unei progresii aritmetice cu $a_1 = 5$ și $r = 3$: în $B1$ pune `=5`, iar în $B2$ pune `=B1+3` și copiază în jos.
- În coloana C, calculează sumele parțiale: în $C1$ pune `=B1`, iar în $C2$ pune `=C1+B2` și copiază în jos.
- În coloana D, aplică formula: $D_n = \dfrac{n(2\cdot 5 + (n-1)\cdot 3)}{2}$. În $D1$ pune `=A1*(2*5+(A1-1)*3)/2`.
- Compară: coloanele C și D trebuie să fie identice.

Exersează!

Calcule directe

5 Calculează S_{20} pentru progresia aritmetică cu $a_1 = 7$ și $r = 4$.

Model de rezolvare: $a_{20} = 7 + 19\cdot 4 = 83$. Atunci $S_{20} = \dfrac{20\cdot(7+83)}{2} = \dfrac{20\cdot 90}{2} = 900$.

6 Calculează $1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 100$. (Indicație: $1, 4, 7, \ldots$ este progresie aritmetică cu $a_1 = 1$, $r = 3$. Determină mai întâi câți termeni are.)

7 Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu

$$a_1 = 5 \quad \text{și} \quad r = 6.$$

Calculează:

$$\sum_{k=1}^{15} a_k.$$

8 Se consideră progresia aritmetică:

$$12,\ 17,\ 22,\ 27, \ldots$$

a) Scrie formula termenului general a_n.

b) Calculează:

$$\sum_{k=1}^{25} a_k.$$

9 Calculează suma numerelor naturale impare de la 1 la 99:

$$\sum_{k=1}^{50}(2k-1).$$

10 Calculează suma numerelor naturale pare de la 2 la 120:

$$\sum_{k=1}^{60}2k.$$

11 Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice este $S_n = 3n^2 + 5n$. Determină a_1 și r.
Indicație: $a_1 = S_1$ și $a_n = S_n - S_{n-1}$, pentru orice $n \geq 2$.

12 Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică pentru care

$$a_4 = 14 \quad \text{și} \quad a_{12} = 46.$$

Calculează:

$$\sum_{k=1}^{20}a_k.$$

13 Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică pentru care

$$a_3 \cdot a_{10} = 147 \quad \text{și} \quad \sum_{k=1}^{12}a_k = 168.$$

Determină toate posibilitățile pentru a_1 și r.

14 Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică și notează:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}a_k.$$

Știind că

$$S_{10} = 150 \quad \text{și} \quad S_{30} = 1050,$$

determină S_{60}.

15 Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică pentru care

$$\sum_{k=1}^{n}a_k = 3n^2 - n.$$

a) Determină a_1 și r.

b) Scrie formula termenului general a_n.

c) Calculează:

$$\sum_{k=1}^{20} a_k.$$

16 Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Se știe că

$$\sum_{k=1}^{8} a_k = \sum_{k=1}^{14} a_k.$$

Arată că

$$\sum_{k=1}^{22} a_k = 0.$$

17 Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică și notează:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Știind că

$$S_n = \frac{5n^2 - n}{2},$$

determină progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$.

18 Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Se știe că

$$a_5 + a_{15} = 48.$$

Calculează:

$$\sum_{k=5}^{15} a_k.$$

19 Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Arată că, dacă $i, j, k, l \in \mathbb{N}^*$ și $i + j = k + l$, atunci

$$a_i + a_j = a_k + a_l.$$

Aplică rezultatul pentru a calcula rapid

$$a_5 + a_{21},$$

știind că $a_{13} = 34$.

Transpunere în limbaj matematic

20 În prima oră, un șofer parcurge 40 km. În fiecare oră următoare, el parcurge cu 5 km mai mult decât în ora anterioară.

a) Câți kilometri parcurge în a 5-a oră?

b) Câți kilometri parcurge în total în primele 8 ore?

21 O elevă citește o carte cu 480 de pagini după următorul program: în prima zi citește 30 de pagini, iar în fiecare zi următoare citește cu 5 pagini mai mult decât în ziua precedentă. În câte zile termină cartea?
Indicație: trebuie să găsești cel mai mic n pentru care $S_n \geq 480$.

Modelare matematică

22 O fabrică produce, în prima zi, 50 de unități. În fiecare zi următoare crește producția cu 8 unități. Dacă funcționează 30 de zile pe lună, câte unități produce într-o lună? Discută rezultatul: este realist să crești producția cu o cantitate constantă pe termen lung?

23 **Portofoliu.** Într-o progresie aritmetică, suma primilor n termeni este egală cu $\frac{1}{9}$ din suma primilor $3n$ termeni. Determină legătura dintre a_1 și r și arată că această legătură nu depinde de n.

Lecția L2.4

Progresii geometrice

Amintește-ți!

La o progresie aritmetică, fiecare termen se obține din precedentul *adăugând* aceeași cantitate (rația r). Există însă și șiruri în care fiecare termen se obține din precedentul *înmulțind* cu aceeași cantitate.

1 Un cont de economii oferă o dobândă anuală de 5%. Adică, dacă într-un an începi cu suma S, la sfârșitul anului ai $S + 5\% \cdot S = 1{,}05 \cdot S$.
Pornind de la 1 000 de lei depuși inițial, completează tabelul:

Anul	0	1	2	3	4	5
Sumă (lei)	1 000	1 050	1 102,50			

2 Notează cu S_n suma din cont după n ani ($S_0 = 1\,000$). Pentru oricare doi termeni consecutivi, calculează *raportul* $\frac{S_{n+1}}{S_n}$. Ce observi?

Observă și descoperă!

Maria și Ion vor să planteze copaci. Maria plantează 5 copaci în prima săptămână și, în fiecare săptămână următoare, cu 3 copaci mai mult decât în săptămâna precedentă. Ion plantează 2 copaci în prima săptămână, dar, în fiecare săptămână următoare, dublează numărul de copaci plantați.

3 Completează tabelul:

Săptămâna	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Maria	5	8								
Ion	2	4	8							

4 Câți copaci a plantat fiecare în săptămâna a 10-a? În care săptămână Ion o depășește pe Maria și nu mai este depășit niciodată?

5 Discută cu colegul: care este diferența esențială dintre tipul de creștere al Mariei și al lui Ion? Graficul de mai jos îți poate da un răspuns vizual.



Observație: în primele 3 săptămâni, Maria plantează mai mulți copaci; din săptămâna a 4-a, Ion o depășește, iar diferența crește foarte repede.

★ Important!

Definiție. Un șir $(b_n)_{n\geq 1}$ se numește *progresie geometrică* dacă $b_n \neq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și există un număr real $q \neq 0$, numit *rația progresiei*, astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q \quad \text{(echivalent: } b_{n+1} = b_n \cdot q\text{)}.$$

Termenul general. Pentru o progresie geometrică cu primul termen b_1 și rația q:

$$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.}$$

Justificare: $b_2 = b_1 \cdot q$; $b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2$; $b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^3$; $\ldots$; $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Caracterizarea unei progresii geometrice prin trei termeni consecutivi. Pentru o progresie geometrică cu termeni *pozitivi* și pentru orice trei termeni consecutivi b_{k-1}, b_k, b_{k+1}:

$$b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}} \quad \text{(media geometrică)}.$$

Mai general (fără ipoteza pozitivității):

$$b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}.$$

Reciproc: dacă, într-un șir cu termeni nenuli, orice trei termeni consecutivi verifică $b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}$, atunci șirul este progresie geometrică.

Caracterizare pentru $n \geq 3$ termeni. Numerele nenule $b_1, b_2, \ldots, b_n$ formează (în ordinea dată) o progresie geometrică dacă și numai dacă, pentru orice $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$:

$$b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}.$$

Bine de știut!

Recunoaște repede o progresie geometrică:

- calculezi raportul primilor doi termeni: $q = b_2/b_1$;
- verifici că raportul se păstrează: b_3/b_2, b_4/b_3 etc.

Tipuri de progresii geometrice (pentru $b_1 > 0$):

- dacă $q > 1$, progresia este *crescătoare* (creștere exponențială);
- dacă $0 < q < 1$, progresia este *descrescătoare* către 0 (descreștere exponențială);
- dacă $q = 1$, progresia este *constantă*;
- dacă $q < 0$, termenii alternează ca semn (sunt, pe rând, pozitivi și negativi).

Exersează!

Recunoaște o progresie geometrică

6 Stabilește dacă șirurile sunt progresii geometrice. Dacă da, precizează rația și primul termen.

a) $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$

b) $1, -2, 4, -8, 16, \ldots$

c) $5, 10, 15, 20, 25, \ldots$

d) $b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

7 Pentru fiecare dintre următoarele șiruri, stabilește dacă termenii scriși pot fi primii patru termeni ai unei progresii geometrice. În caz afirmativ, precizează rația progresiei.

a) $2,\ 6,\ 18,\ 54$;

b) $5,\ 10,\ 20,\ 45$;

c) $-3,\ 6,\ -12,\ 24$;

d) $81,\ 27,\ 9,\ 3$.

8 Se consideră șirul:

$$3,\ 6,\ 12,\ 24, \ldots$$

a) Arată că șirul este o progresie geometrică.

b) Determină primul termen și rația progresiei.

c) Scrie formula termenului general b_n.

d) Calculează b_7.

Calcule cu termenul general

9 Într-o progresie geometrică, $b_1 = 2$ și $q = 3$. Calculează b_5 și b_8.

Model de rezolvare: $b_5 = b_1 \cdot q^4 = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$. $b_8 = b_1 \cdot q^7 = 2 \cdot 3^7 = 2 \cdot 2\,187 = 4\,374$.

10 Într-o progresie geometrică, $b_2 = 6$ și $b_5 = 162$. Calculează b_1 și q.

Model de rezolvare: $\dfrac{b_5}{b_2} = q^3$, deci $q^3 = 27$ și $q = 3$. Atunci $b_1 = b_2/q = 6/3 = 2$.

11 Într-o progresie geometrică, $b_3 = 12$ și $b_6 = 96$. Calculează b_1, q și b_{10}.

Caracterizarea prin trei termeni consecutivi

12 Determină valoarea lui $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, astfel încât numerele $4, x, 25$ să fie, în ordinea dată, în progresie geometrică.

13 Verifică dacă numerele $3, 6, 12, 24, 48$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice. Justifică folosind caracterizarea prin trei termeni consecutivi (media geometrică).

14 Determină numărul real nenul x pentru care numerele

$$x,\ 4,\ 16$$

sunt, în ordinea dată, termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

15 Determină toate valorile reale ale numărului lipsă, astfel încât cele trei numere să fie termeni consecutivi ai unei progresii geometrice:

a) $3,\ \square,\ 27$;

b) $5,\ \square,\ 80$;

c) $\square,\ 12,\ 48$;

d) $64,\ \square,\ 4$.

16 Se consideră o progresie geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_1 = 2$ și $q = 3$.

a) Calculează b_2, b_3, b_4.

b) Scrie formula termenului general.

c) Determină n pentru care $b_n = 1458$.

17 O progresie geometrică are primul termen $b_1 = 96$ și rația $q = \frac{1}{2}$.

a) Scrie primii cinci termeni ai progresiei.

b) Precizează dacă progresia este crescătoare, descrescătoare sau constantă.

c) Determină termenul b_8.

18 Se consideră trei numere reale pozitive x, y, z, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii geometrice. Știind că $x = 4$ și $z = 100$, determină y.

19 Determină toate perechile (x,y) de numere reale nenule pentru care numerele

$$x,\ y,\ x^2y$$

sunt, în ordinea dată, termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

20 Fie trei numere nenule a,b,c, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii geometrice de rație q.

Arată că numerele

$$a^2,\ b^2,\ c^2$$

sunt, de asemenea, termeni consecutivi ai unei progresii geometrice. Precizează rația noii progresii în funcție de q.

21 Se consideră trei numere reale pozitive x,y,z, termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, cu rația $q>0$.

a) Exprimă y și z în funcție de x și q.

b) Verifică dacă numerele x,y,z pot reprezenta lungimile laturilor unui triunghi pentru $q=\frac{3}{2}$. Dar pentru $q=2$?

Indicație: folosește inegalitatea triunghiului.

Transpunere și modelare

22 Un cont de economii oferă o dobândă anuală de 4%, capitalizată anual (adică dobânda se adaugă la sumă, iar în anul următor dobânda se calculează la noua sumă). Mihai depune 2000 de lei.

a) Notează cu S_n suma din cont după n ani. Calculează S_1,S_2,S_3.

b) Arată că $(S_n)_{n\geq 0}$ (cu $S_0=2000$) este progresie geometrică. Care este rația?

c) Cât are Mihai după 10 ani?

Comentariu: formula $S_n=S_0\cdot(1+p)^n$, unde p este dobânda anuală în formă zecimală, este chiar formula *dobânzii compuse*, des întâlnită în finanțe.

23 O populație de bacterii dintr-un mediu controlat se dublează la fiecare 20 de minute. Inițial sunt 1000 de bacterii.

a) Câte bacterii sunt după 1 oră (60 de minute, deci 3 dublări)?

b) Câte bacterii sunt după 4 ore?

c) După cât timp numărul de bacterii depășește 10^9? Exprimă rezultatul în ore și minute.

24 **Portofoliu.** Numerele a,b,c, în această ordine, sunt simultan în progresie aritmetică și în progresie geometrică, cu termeni reali nenuli. Arată că $a=b=c$.

Lecția L2.5

Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice. Aplicație: $a^n - b^n$

Amintește-ți!

La progresiile aritmetice ai obținut formula sumei prin gruparea termenilor în perechi. La progresiile geometrice, trucul este altul: înmulțim suma cu rația și scădem din rezultat suma inițială.

1. Calculează suma $S = 1+3+9+27+81$.
2. Calculează $3 \cdot S$ (rezultatul de la sarcina anterioară înmulțit cu rația). Apoi calculează $3 \cdot S - S$. Ce observi?

Observă și descoperă!

Vom deduce formula sumei pentru o progresie geometrică folosind metoda din „Amintește-ți”.
Fie $b_1, b_2, \ldots, b_n$ primii n termeni ai unei progresii geometrice cu rația q. Notăm $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.

3. Înmulțește egalitatea $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ cu q. Ce devine $b_k \cdot q$? Scrie noua egalitate.
4. Scade prima egalitate din a doua. Ce termeni se anulează? Ce rămâne?
5. Folosind $b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$, exprimă rezultatul în funcție de b_1, q și n.

★ Important!

Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu primul termen b_1 și rația q. Notăm $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.

Cazul $q \neq 1$:

$$\boxed{S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.}$$

Cazul $q = 1$: toți termenii sunt egali cu b_1, deci $S_n = n \cdot b_1$.

Demonstrație (pentru $q \neq 1$). Pornim de la egalitatea

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \cdots + b_1 q^{n-1}. \qquad (*)$$

Înmulțim cu q:

$$q \cdot S_n = b_1 q + b_1 q^2 + \cdots + b_1 q^{n-1} + b_1 q^n. \qquad (**)$$

Scădem $(*)$ din $(**)$:

$$q \cdot S_n - S_n = b_1 q^n - b_1.$$

Așadar $(q-1)\cdot S_n = b_1(q^n-1)$, deci

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}. \qquad \square$$

Aplicație: descompunerea lui $a^n - b^n$. Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right).}$$

De ce este aceasta o aplicație a sumei progresiei geometrice?
Considerăm cazul $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$ (în cazurile $a = b$, $a = 0$ sau $b = 0$, egalitatea se verifică direct) și progresia geometrică cu primul termen a^{n-1} și rația $q = b/a$. Avem n termeni:

$$a^{n-1},\ a^{n-1}\cdot\frac{b}{a} = a^{n-2}b,\ a^{n-1}\cdot\frac{b^2}{a^2} = a^{n-3}b^2,\ \ldots,\ a^{n-1}\cdot\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} = b^{n-1}.$$

Suma lor este, pe de o parte:

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1},$$

iar pe de altă parte, prin formula sumei progresiei geometrice (cu $q = b/a$):

$$S_n = a^{n-1}\cdot\frac{(b/a)^n - 1}{(b/a)-1} = a^{n-1}\cdot\frac{(b^n-a^n)/a^n}{(b-a)/a} = \frac{b^n-a^n}{b-a} = \frac{a^n-b^n}{a-b}.$$

Egalând cele două expresii, obținem $\dfrac{a^n-b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}$, de unde rezultă formula. $\square$

Cazuri particulare des folosite:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$$

Bine de știut!

Cum verific rapid formula sumei? Pentru $n = 2$: $S_2 = b_1 + b_1 q = b_1(1+q)$. Formula: $b_1 \cdot \dfrac{q^2-1}{q-1} = b_1 \cdot \dfrac{(q-1)(q+1)}{q-1} = b_1(q+1)$. Identic.

Pentru $|q| < 1$ și n mare, suma se apropie de $\dfrac{b_1}{1-q}$. Acesta este un rezultat important pentru progresii geometrice infinite (subiect aprofundat în clasa a XI-a).

Exersează!

Calcule directe

6 Calculează suma $S_8 = 1+2+4+8+16+32+64+128$ folosind formula sumei progresiei geometrice.

Model de rezolvare: $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 8$. $S_8 = 1 \cdot \dfrac{2^8 - 1}{2 - 1} = 256 - 1 = 255$.

7 Calculează suma $S = 3+6+12+24+\cdots+1\,536$.

Indicație: progresie geometrică cu $b_1 = 3$, $q = 2$. Mai întâi determină câți termeni are.

8 Calculează suma:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

9 Calculează suma:

$$\sum_{k=1}^{m} 3^k, \quad m \in \mathbb{N}^*.$$

10 Calculează suma:

$$\sum_{k=1}^{n} 2026^k, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

11 Calculează S_{10} pentru progresia geometrică cu $b_1 = 4$ și $q = -1/2$.

Aplicarea formulei $a^n - b^n$

12 Folosind formula $a^n - b^n$, descompune în factori:

a) $x^3 - 8$; b) $x^4 - 16$; c) $x^5 - 32$.

Model de rezolvare — punctul a): $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2+2x+4)$.

13 Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$, cu $b_1 = 5$ și $q = 2$.
Calculează:

$$\sum_{k=1}^{6} b_k.$$

14 Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$, cu $b_1 = 81$ și $q = \frac{1}{3}$.

a) Scrie primii cinci termeni ai progresiei.

b) Calculează suma primilor cinci termeni:

$$\sum_{k=1}^{5} b_k.$$

15 Determină suma: $4+12+36+\cdots+4\cdot 3^{n-1}$. Scrie mai întâi suma folosind notația $\sum$.

16 Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$, cu $b_1 = 7$ și $q = 1$.

Calculează:

$$\sum_{k=1}^{n} b_k.$$

17 Determină numărul natural nenul n pentru care

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k = 363.$$

18 Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$, cu termenii pozitivi, rația $q \in \mathbb{N}^*$, $q \neq 1$, și suma primilor n termeni

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Știind că $b_1 = 2$ și $S_5 = 62$, determină rația q.

Modelare

19 O minge de tenis de masă, lăsată să cadă de la înălțimea $h_0 = 200$ cm, sare la fiecare contact cu solul la o înălțime egală cu 80% din înălțimea precedentă.

a) Notează cu h_n înălțimea (în cm) a celui de-al n-lea salt. Arată că $(h_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică. Precizează h_1 și q.

b) Calculează h_5.

c) Demonstrează că distanța parcursă de minge în n salturi este mai mică de 16 m, oricâte salturi ar efectua aceasta (un salt reprezintă deplasarea mingii între două ciocniri cu solul).

20 Maria a primit un mesaj „lanț” pe care îl trimite la 4 prieteni. Fiecare destinatar îl trimite, la rândul lui, la 4 prieteni noi și așa mai departe.

a) Câți oameni primesc mesajul în pasul n ($n = 1$ înseamnă cei 4 prieteni inițiali ai Mariei)?

b) Câți oameni primesc mesajul în total în primii 10 pași?

c) Discută cu colegul: cât de repede crește numărul total? Este realist? Care sunt limitările?

21 **Portofoliu.** Calculează suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ și determină valoarea de care se apropie această sumă când n devine foarte mare. (Indicație: $b_1 = 1$, $q = 1/2$, formula sumei.)

Lecția L2.6

Aplicații ale șirurilor și progresiilor în contexte practice

Amintește-ți!

Ai învățat două tipuri de progresii: aritmetică (adăugare repetată) și geometrică (înmulțire repetată). Această lecție face un pas suplimentar: te ajută să *recunoști* care model se potrivește unei situații reale și să *compari* cele două tipuri de creștere.

1 Discută cu colegul: în care dintre situațiile de mai jos se potrivește o progresie aritmetică? În care, una geometrică?

a) Mihai economisește 80 de lei lunar.

b) Andrei depune 1 000 de lei într-un cont cu dobândă anuală de 5%, capitalizată anual.

c) O populație de bacterii se dublează la fiecare 20 de minute.

d) Maria citește 20 de pagini în prima zi și cu 5 pagini mai mult în fiecare zi.

Observă și descoperă!

Andrei și Maria au, fiecare, 1 000 de lei pe care vor să-i depună într-un cont. Au două opțiuni:

- **Cont A:** dobândă *simplă* de 5% pe an. Adică: în fiecare an primesc 5% din 1 000 de lei = 50 de lei dobândă.
- **Cont B:** dobândă *compusă* de 5% pe an. Adică: în fiecare an primesc 5% din suma pe care o au atunci în cont (suma inițială plus dobânzile acumulate).

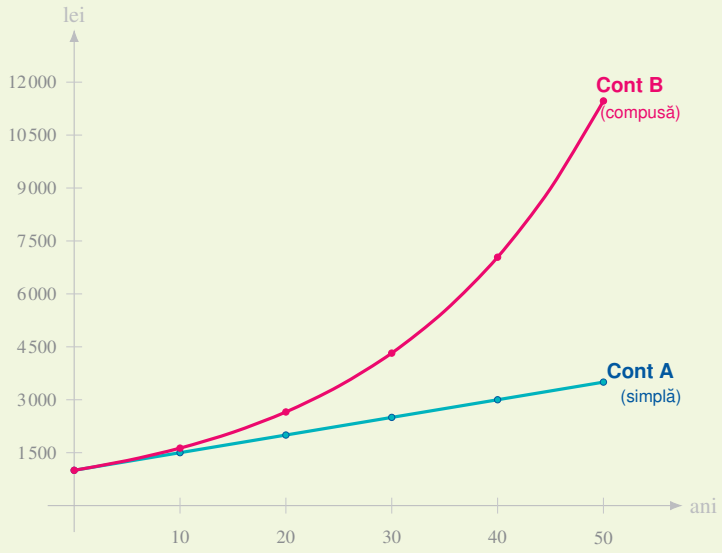
2 Completează tabelul cu sumele din cont la finalul fiecărui an. Pentru contul B, suma de la sfârșitul anului n este $1\,000 \cdot (1{,}05)^n$.

Anul	0	1	2	3	4	5	10	20	30	50
Cont A (lei)	1 000	1 050	1 100							
Cont B (lei)	1 000	1 050	1 102,50							

3 Pentru fiecare cont, identifică tipul de progresie. Calculează rația fiecărei progresii: diferența dintre doi termeni consecutivi (contul A), respectiv raportul dintre doi termeni consecutivi (contul B).

4 Discută cu colegul: după 5 ani, diferența dintre sumele din cele două conturi este de aproximativ 26 de lei. După 50 de ani, este uriașă. De ce? Care este lecția pentru tine, dacă îți programezi economiile pe termen lung?

Graficul de mai jos ilustrează exact această diferență, pe parcursul a 50 de ani:



După 50 *de ani: contul A are* 3500 *de lei (creștere liniară), contul B are aproximativ* 11467 *de lei (creștere exponențială). Contul B are de peste trei ori mai mulți bani decât contul A, iar diferența (aproximativ* 7967 *de lei) este de aproape opt ori suma inițială!*

★ Important!

Cum aleg modelul potrivit? Pentru o situație practică:

1. Identifică *cantitatea* care se schimbă (suma din cont, populația, distanța, prețul etc.).
2. Calculează diferențele consecutive $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$, … Dacă toate sunt egale (diferența este constantă) $\Rightarrow$ **progresie aritmetică**.
3. Calculează rapoartele consecutive a_2/a_1, a_3/a_2, a_4/a_3, … Dacă toate sunt egale (raportul este constant) $\Rightarrow$ **progresie geometrică**.
4. Dacă nu se întâmplă nici una, nici alta $\Rightarrow$ șirul nu este nici progresie aritmetică, nici geometrică.

Comparație: creștere liniară vs. exponențială. Fie două firme ale căror vânzări cresc: la prima, liniar (după o progresie aritmetică, model PA); la a doua, exponențial (după o progresie geometrică, model PG). Pe termen scurt, PA poate avea valori mai mari decât PG (de exemplu, dacă cele două pornesc de la aceeași valoare, iar creșterea constantă r a PA este mai mare decât primele creșteri ale PG, $b_2 - b_1$, $b_3 - b_2$, …). Dar, pe termen lung, o PG cu termeni pozitivi și rația $q > 1$ depășește *întotdeauna* PA.

Formule-cheie pentru aplicații practice.

	Progresie aritmetică	Progresie geometrică
Termen general	$a_n = a_1 + (n-1)r$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Suma S_n	$\dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$	$b_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ $(q \neq 1)$
Caracterizare prin trei termeni consecutivi	$a_k = \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$	$b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}$ (termeni nenuli)
Tip de creștere	liniară	exponențială

Aplicație digitală

Compară pe un grafic creșterea liniară cu cea exponențială folosind **Desmos** (`www.desmos.com`) sau **GeoGebra**.

- În Desmos, scrie pe un rând: $f(x) = 50 + 30x$ (model liniar, PA).
- Pe alt rând: $g(x) = 50 \cdot 1{,}1^x$ (model exponențial, PG cu rația 1,1).
- Reglează scara axelor și observă, pentru $x \geq 0$: până la ce valoare a lui x se află graficul lui f deasupra graficului lui g? De la ce valoare a lui x se află graficul lui g deasupra graficului lui f?

Exersează!

Selectează modelul potrivit

5 Pentru fiecare situație, decide dacă modelul natural este o progresie aritmetică, geometrică sau alt tip de șir. Justifică.

a) O firmă are 50 de angajați și angajează 4 noi angajați în fiecare lună.

b) Valoarea unei mașini noi scade cu 15% în fiecare an.

c) În prima săptămână Andrei aleargă 20 de minute. În fiecare săptămână adaugă 5 minute.

d) Numărul de utilizatori ai unei aplicații se înmulțește cu 1,3 în fiecare lună.

e) Numărul de zile din fiecare lună a anului 2026, în ordinea lunilor (ianuarie, februarie, …, decembrie).

Modelarea cu progresii

6 **Plan de economii.** Mihai vrea să strângă bani pentru o excursie în decembrie 2027. În ianuarie 2026 depune 200 de lei. Plănuiește să depună în fiecare lună cu 25 de lei mai mult decât în luna precedentă (deci în februarie depune 225 de lei, în martie 250 de lei etc.).

a) Câți lei depune în decembrie 2027 (luna 24)?

b) Cât are strâns în total la finalul perioadei de 24 de luni?

7 **Compararea a două investiții.** Andreea moștenește 5 000 de lei și are două opțiuni:

- **Opțiunea X:** adăugare anuală de câte 400 de lei (din alte surse) la sumă (fără dobândă).
- **Opțiunea Y:** depunere la bancă cu dobândă compusă de 7% anual, fără adăugiri.

a) Modelează fiecare opțiune cu progresia adecvată. Scrie formulele pentru sumele X_n și Y_n după n ani.

b) Calculează $X_{10}, Y_{10}, X_{20}, Y_{20}, X_{30}, Y_{30}$.

c) După câți ani opțiunea Y depășește pentru prima dată opțiunea X? (Poți folosi un calculator sau o foaie de calcul.)

8 **Răspândirea unei boli infecțioase.** Într-un model simplificat, fiecare persoană infectată infectează în medie 2,1 alte persoane. Inițial, sunt 10 persoane infectate (ziua 0).

a) Câte persoane noi sunt infectate în ziua 1? Dar în ziua 5? (Considerăm o „zi” ca un ciclu de transmitere.)

b) Câte persoane au fost infectate în total (inclusiv cele 10 inițiale) după 5 cicluri de transmitere? Rotunjește rezultatul la un număr întreg.

c) Discută cu colegii: ce factori din realitate ar limita această creștere?

9 **Industria auto.** O fabrică de automobile compară două linii de producție.
Linia A produce în prima zi 120 de mașini, iar în fiecare zi produce cu 15 mașini mai mult decât în ziua precedentă.
Linia B produce în prima zi 100 de mașini, iar producția estimată se mărește zilnic de 1,2 ori.

a) Precizează ce tip de progresie descrie producția fiecărei linii.

b) Scrie formula termenului general pentru fiecare linie, notând cu a_n, respectiv b_n, producția din ziua a n-a.

c) Calculează producția estimată a fiecărei linii în ziua a 5-a.

d) Calculează producția totală estimată a fiecărei linii în primele 5 zile:

$$\sum_{k=1}^{5} a_k \qquad \text{și} \qquad \sum_{k=1}^{5} b_k.$$

10 **Autonomia unei mașini electrice.** Bateria unei mașini electrice are inițial o autonomie de 480 km.
Într-un prim model, autonomia scade cu 8 km în fiecare an.
Într-un al doilea model, autonomia scade anual cu 2% față de autonomia din anul precedent.

a) Precizează care model este descris de o progresie aritmetică și care de o progresie geometrică.

b) Notează cu A_n, respectiv B_n, autonomia după n ani, unde $n \in \mathbb{N}$ și $A_0 = B_0 = 480$. Scrie formula pentru fiecare model.

c) Calculează autonomia estimată după 5 ani, în fiecare model.

d) Compară cele două rezultate și spune în care model autonomia scade mai repede în primii 5 ani.

11 **Inteligența artificială.** O aplicație de inteligență artificială este testată timp de mai multe săptămâni. În prima săptămână, aplicația primește 2 000 de cereri. Numărul cererilor crește săptămânal de 1,5 ori. În același timp, echipa tehnică poate procesa 2 500 de cereri în prima săptămână, iar capacitatea de procesare crește cu 700 de cereri în fiecare săptămână.

a) Modelează numărul de cereri primite printr-o progresie geometrică.

b) Modelează capacitatea de procesare printr-o progresie aritmetică.

c) Scrie termenul general al fiecărei progresii.

d) Calculează numărul de cereri primite și capacitatea de procesare în săptămâna a 4-a.

e) Verifică dacă în săptămâna a 4-a aplicația poate procesa toate cererile primite.

12 **Social media.** O pagină de social media are inițial 1 000 de urmăritori.
Într-o campanie obișnuită, pagina câștigă câte 250 de urmăritori pe zi.
Într-o campanie virală, numărul de urmăritori se înmulțește zilnic cu 2.

a) Notează cu u_n numărul de urmăritori după n zile de campanie, unde $n \in \mathbb{N}$. Scrie formula pentru campania obișnuită.

b) Notează cu v_n numărul de urmăritori după n zile de campanie, unde $n \in \mathbb{N}$. Scrie formula pentru campania virală.

c) Calculează numărul de urmăritori după 4 zile, în fiecare campanie.

d) Determină care campanie aduce mai mulți urmăritori după 4 zile.

e) Explică de ce, pe termen lung, modelul geometric poate depăși modelul aritmetic.

13 **Comparație între creștere liniară și creștere exponențială.** Două firme lansează câte un produs nou. Firma A vinde în prima lună 500 de produse, iar în fiecare lună vinde cu 150 de produse mai mult decât în luna precedentă.
Firma B vinde în prima lună 300 de produse, iar vânzările se dublează în fiecare lună.

a) Precizează ce tip de progresie descrie vânzările fiecărei firme.

b) Notând cu a_n, respectiv b_n, numărul de produse vândute de firma A, respectiv de firma B, în luna a n-a, scrie formula vânzărilor lunare pentru fiecare firmă.

c) Calculează vânzările fiecărei firme în luna a 10-a.

d) Calculează numărul total de produse vândute de fiecare firmă în primele 10 luni:

$$\sum_{k=1}^{10} a_k \qquad \text{și} \qquad \sum_{k=1}^{10} b_k.$$

e) Stabilește care firmă vinde mai mult în total în primele 10 luni.

14 **Sinteză.** **Reducerea consumului.** O companie consumă 5 000 kWh de energie în prima lună a unui plan de eficiență. Începând cu luna a doua, își propune să reducă lunar consumul cu un procent fix de 2% din consumul lunii precedente.

a) Modelează consumul lunar cu o progresie. Care este rația?

b) Calculează consumul în luna a 12-a.

c) În a câta lună a planului consumul scade, pentru prima dată, sub 4 000 kWh?

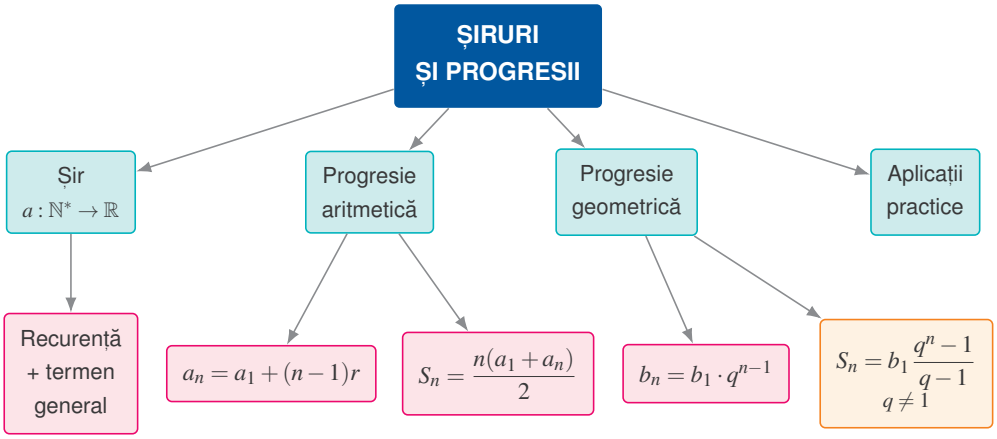
d) Discută cu colegul: este sustenabil să continui reducerea cu 2% pe termen foarte lung? De ce?

OBSERV!

Lista de observare a activității	**Da**	**Nu**
Am identificat corect datele problemei?		
Am stabilit corect relațiile dintre datele problemei?		
Am aplicat corect formulele?		
Am calculat corect?		
Am verificat rezolvarea problemei?		
Am corectat când am greșit?		
Am avut nevoie de ajutor?		

Recapitulare

Hartă conceptuală



De reținut!

La finalul acestei unități trebuie să poți:

- recunoaște un șir și identifica primul termen, rangul și termenul general;
- trece de la o formulă de recurență la una explicită și invers, pentru cazuri simple;
- recunoaște o progresie aritmetică (diferența constantă) și o progresie geometrică (raportul constant);
- folosi formulele $a_n=a_1+(n-1)r$ și $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$ pentru a calcula termeni de un anumit rang;
- folosi formulele sumelor: $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ pentru PA și $S_n=b_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$ pentru PG cu $q\neq 1$ (pentru $q=1$, $S_n=n\cdot b_1$);
- folosi caracterizarea prin trei termeni consecutivi (medie aritmetică pentru PA, medie geometrică pentru PG cu termeni pozitivi);
- alege modelul (PA sau PG) potrivit unei situații practice și folosi acest model pentru a face predicții și a fundamenta decizii;
- compara creșterea liniară cu cea exponențială și explica diferența.

Sarcini de sinteză

Exersează!

1. În progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_3 = 7$ și $a_8 = 22$. Calculează a_1, r, a_{20} și S_{20}.
2. În progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$, cu termeni pozitivi, se cunosc $b_2 = 6$ și $b_4 = 54$. Calculează b_1, q, b_8 și S_6.
3. Determină valorile lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele $x-1$, $x+2$, $5x-1$ să fie, în ordinea dată, în progresie aritmetică.
4. Determină valorile lui $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, astfel încât numerele x, $x+3$, $4x$ să fie, în ordinea dată, în progresie geometrică.
5. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$, definite prin

$$a_n = 2n+1, \qquad b_n = 3\cdot 2^{n-1}.$$

   a) Arată că (a_n) este progresie aritmetică și că (b_n) este progresie geometrică.

   b) Se definește șirul $(u_n)_{n\geq 1}$ prin

$$u_n = a_n + b_n.$$

   Verifică, folosind primii termeni, dacă (u_n) poate fi progresie aritmetică sau progresie geometrică.

   c) Se definește șirul $(v_n)_{n\geq 1}$ prin

$$v_n = a_n \cdot b_n.$$

   Verifică, folosind primii termeni, dacă (v_n) poate fi progresie aritmetică sau progresie geometrică.

6. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ pentru care suma primilor n termeni este

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3n^2 + 2n.$$

   a) Determină termenul general a_n.

   b) Arată că șirul (a_n) este progresie aritmetică.

   c) Determină primul termen și rația progresiei.

7. Se consideră șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ pentru care suma primilor n termeni este

$$T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 5(2^n - 1).$$

   a) Determină termenul general b_n.

   b) Arată că șirul (b_n) este progresie geometrică.

   c) Determină primul termen și rația progresiei.

8. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică și $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică, astfel încât

$$a_1 = b_1 = 4, \qquad a_2 = b_2 = 8.$$

a) Determină formulele termenilor generali a_n și b_n.

b) Calculează a_5 și b_5.

c) Calculează

$$\sum_{k=1}^{10} a_k \qquad \text{și} \qquad \sum_{k=1}^{10} b_k.$$

d) Compară cele două sume.

9 Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de rație r. Se definesc șirurile $(b_n)_{n\geq 1}$ și $(c_n)_{n\geq 1}$ prin

$$b_n = a_{n+2} - a_n, \qquad c_n = a_n + a_{n+2}.$$

a) Arată că șirul (b_n) este constant.

b) Arată că șirul (c_n) este progresie aritmetică.

c) Exprimă rația progresiei (c_n) în funcție de r.

10 Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu termeni pozitivi și rația $q > 0$. Se definesc șirurile $(u_n)_{n\geq 1}$ și $(v_n)_{n\geq 1}$ prin

$$u_n = \frac{b_{n+2}}{b_n}, \qquad v_n = b_n \cdot b_{n+2}.$$

a) Arată că șirul (u_n) este constant.

b) Arată că șirul (v_n) este progresie geometrică.

c) Determină rația progresiei (v_n).

11 Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu

$$a_1 = 2, \qquad r = 3.$$

Se definește șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ prin

$$b_n = 2^{a_n}.$$

a) Scrie primii patru termeni ai șirului (a_n).

b) Scrie primii patru termeni ai șirului (b_n).

c) Arată că (b_n) este progresie geometrică.

d) Determină rația progresiei (b_n).

12 (*Aplicație*) O persoană începe un program de alergare. În prima săptămână aleargă 30 de minute. În fiecare săptămână crește durata cu 20% față de săptămâna precedentă. (Rotunjește la minute întregi doar rezultatele finale.)

a) Care este modelul potrivit (PA sau PG)? Care este rația?

b) Câte minute aleargă în săptămâna a 5-a?

c) Câte minute aleargă în total în primele 10 săptămâni?

13 (*Aplicație: dobândă compusă vs. dobândă simplă*) Maria depune 5 000 de lei la o bancă. Banca îi oferă două opțiuni:

- **Opțiunea A** (dobândă *simplă*): primește în fiecare an 300 de lei dobândă, calculată pe suma inițială.
- **Opțiunea B** (dobândă *compusă*): suma crește anual cu 5% față de suma anului precedent.

a) Notează cu A_n și B_n sumele după n ani. Stabilește tipul progresiei pentru fiecare.

b) Calculează A_5 și B_5. Care opțiune este mai avantajoasă după 5 ani?

c) Calculează A_{20} și B_{20}. Care opțiune este mai avantajoasă pe termen lung? Discută cu colegul de ce diferența crește.

14 (*Aplicație: formula $a^n - b^n$*) Folosind formula $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$, dedusă în lecția L2.5, descompune în factori și simplifică:

a) $\dfrac{x^5 - 1}{x - 1}$ pentru $x \neq 1$;

b) $\dfrac{x^4 - 81}{x - 3}$ pentru $x \neq 3$;

c) $\dfrac{2^{10} - 1}{2 - 1}$ (calcul numeric).

15 Fie x, y, z trei numere reale pozitive, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii geometrice. Știind că

$$x + y + z = 21 \qquad \text{și} \qquad xyz = 216,$$

determină numerele x, y, z.

16 Fie x, y, z trei numere reale pozitive. Știm că x, y, z sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice și că

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$$

sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
Arată că $x = y = z$.

17 Două șiruri $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ au aceiași primi doi termeni: $a_1 = b_1 = 3$ și $a_2 = b_2 = 6$. Șirul (a_n) este progresie aritmetică, iar șirul (b_n) este progresie geometrică.

a) Determină a_n și b_n.

b) Determină cel mai mic număr natural nenul n pentru care $b_n > a_n + 50$.

c) Explică de ce, de la un anumit rang încolo, termenii progresiei geometrice devin mai mari decât termenii progresiei aritmetice.

18 **Sinteză.** Numerele reale a, b, c (cu $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$) formează, în această ordine, o progresie aritmetică, iar a, b, $c+3$ formează, în aceeași ordine, o progresie geometrică. Știind că $a + b + c = 18$, determină toate tripletele (a, b, c).

Investigație: Liniar sau exploziv?

Trăim înconjurați de mărimi care se schimbă: economiile dintr-un cont, numărul de urmăritori ai unei pagini, autonomia unei baterii (care scade an de an), răspândirea unei știri. Unele cresc sau scad „cu pas constant”, altele „de un anumit număr de ori”. Cum putem recunoaște și compara aceste tipuri de evoluție?

1. Ce veți investiga?

Veți analiza, folosind progresii aritmetice și geometrice, două fenomene reale de creștere (sau scădere) din viața de zi cu zi — unul care evoluează aritmetic și unul geometric — și veți compara comportamentul lor pe termen lung.

2. De ce veți investiga?

Pentru a descoperi tipare matematice în situații concrete, pentru a înțelege diferența dintre o creștere liniară și una exponențială și pentru a trage concluzii utile în decizii practice (economii, consum, planificare).

3. Cum veți face investigația?

Etapa 1: Alegerea fenomenelor și colectarea datelor. Alegeți două situații reale: una potrivită unei progresii aritmetice (economii lunare constante, abonament cu cost fix lunar) și una potrivită unei progresii geometrice (dobândă compusă, creșterea numărului de urmăritori cu un procent constant, autonomia unei baterii care scade procentual). Notați sursa datelor (extras de cont, statistici dintr-o aplicație, date estimate realist).

Etapa 2: Modelarea matematică. Pentru fiecare fenomen stabiliți primul termen și rația, scrieți termenul general a_n și justificați de ce un model este aritmetic, iar celălalt geometric.

Etapa 3: Organizarea și analiza datelor. Notați datele într-un tabel (Google Sheets sau Excel). Completați valorile la pașii 1, 2, 3, 5, 10, 20, 30 și calculați suma primilor n termeni S_n acolo unde are sens. Determinați după câți pași diferența dintre cele două modele devine semnificativă.

Etapa 4: Reprezentarea datelor. Realizați grafice (Google Sheets, Excel, Desmos sau GeoGebra) în același sistem de axe, pentru a ilustra cele două evoluții, și descrieți în cuvinte ce observați.

4. Cum veți ști că ați reușit?

Veți considera investigația un succes dacă: ați ales două fenomene reale și relevante și ați colectat date corecte; ați modelat corect fiecare fenomen (termen general, rație, sume); ați completat corect tabelul și ați realizat grafice clare și ușor de interpretat; ați formulat concluzii argumentate despre diferența dintre creșterea aritmetică și cea geometrică; ați prezentat rezultatele într-un mod clar, concis și captivant.

5. Sugestii

- Organizați-vă pe echipe de 3–4 colegi și stabiliți-vă rolurile (culegere de date, calcule, grafice, prezentare).
- Observați modelul de mai jos și adăugați alte situații.
  Andrei depune 1 000 *de lei.* ***Varianta A:*** *adaugă în fiecare lună* 100 *de lei.* ***Varianta B:*** *suma crește lunar cu* 5%. *Care variantă îl avantajează după* 1 *an? Dar după* 5 *ani?*
- Comparați rezultatele obținute pentru seturi diferite de date (sume inițiale diferite, rații diferite) și observați cum se schimbă concluzia.
- Propuneți o recomandare practică (cum este mai avantajos să economisești pe termen lung).

Evaluare — U2

45 de minute · 90 p + 10 p din oficiu

Subiectul I (25 de puncte)

1. **(10 p)** Bifează șirul care **este** progresie aritmetică:

☐ $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

☐ $7, 11, 15, 19, 23, \ldots$

☐ $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

2. **(15 p)** Asociază fiecare formulă din coloana A cu descrierea corespunzătoare din coloana B.

A (formulă)	B (semnificație)
1) $a_n = a_1 + (n-1)r$	a) suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice
2) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$	b) termenul general al unei progresii aritmetice
3) $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$	c) suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice
4) $S_n = b_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, $q \neq 1$	d) termenul general al unei progresii geometrice

Subiectul II (30 de puncte)

3. **(15 p)** Într-o progresie aritmetică, $a_1 = 4$ și $r = 3$.

Completează casetele: $a_{15} =$ _____ și $S_{15} =$ _____.

4. **(15 p)** Mihai depune 1 000 de lei la o bancă, cu dobândă compusă de 4% pe an.

a) Scrie formula sumei din cont după n ani: $M_n =$ _____

b) Calculează suma după 5 ani: $M_5 =$ _____ (folosește $1{,}04^5 \approx 1{,}2167$).

Subiectul III (35 de puncte)

5. **(15 p)** Într-o progresie aritmetică se cunosc $a_4 = 13$ și $a_9 = 33$.

a) Determină primul termen a_1 și rația r.

b) Calculează a_{30}.

c) Calculează S_{30}.

6. **(20 p)** Andreea analizează două oferte de economisire pentru o sumă inițială de 2 000 de lei.

- **Oferta A:** adăugare anuală fixă de 300 de lei, fără dobândă.
- **Oferta B:** dobândă compusă de 8% pe an, fără adăugiri.

a) Pentru fiecare ofertă, identifică tipul de progresie și scrie formula sumei după n ani: A_n pentru oferta A, B_n pentru oferta B.

b) Calculează A_5 și B_5. (Folosește $1{,}08^5 \approx 1{,}4693$.)

c) Calculează A_{20} și B_{20}. (Folosește $1{,}08^{20} \approx 4{,}6610$.)

d) Care ofertă este mai avantajoasă pe termen scurt (5 ani)? Dar pe termen lung (20 de ani)? Justifică în două-trei rânduri.

Notă: 10 puncte se acordă din oficiu. Total: 100 de puncte. Timp de lucru: 45 de minute.

Exersezi, corectezi, progresezi

Pentru fiecare dintre cele două probleme de la subiectul III, ai aici sarcini pe trei niveluri: **Ameliorare**, **Echivalent** și **Dezvoltare**. În funcție de rezultatul obținut la test, începe cu nivelul potrivit și continuă cu următoarele.

Pentru subiectul III, itemul 5 (progresie aritmetică)

Ameliorare

Pas cu pas, exersează formulele folosite în test.

1. Într-o progresie aritmetică, $a_1 = 5$ și $r = 2$. Calculează direct a_2, a_3, a_4, a_{10}, fără formulă.
2. Acum verifică: a_{10} se calculează cu formula $a_n = a_1 + (n-1)r$. Aplică formula. Obții același rezultat?
3. Pentru aceeași progresie ($a_1 = 5$, $r = 2$), calculează S_{10} în două feluri:
   a) adunând direct toți termenii;
   b) folosind formula $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

Echivalent

Într-o progresie aritmetică se cunosc $a_5 = 11$ și $a_{12} = 32$.

a) Determină a_1 și r.

b) Calculează a_{20}.

c) Calculează S_{20}.

Indicație: scrie sistemul $a_1 + 4r = 11$ și $a_1 + 11r = 32$. Scade prima ecuație din a doua.

Dezvoltare

Sumă cu condiție. Într-o progresie aritmetică se cunoaște suma primilor n termeni: $S_n = 2n^2 + 3n$.

a) Calculează $a_1 = S_1$.

b) Calculează $a_2 = S_2 - S_1$.

c) Determină r, apoi calculează a_5 și a_{10} în două moduri (cu formula termenului general și ca diferență $S_n - S_{n-1}$) și verifică dacă obții aceleași valori.

d) Generalizează: arată că, pentru orice progresie aritmetică, S_n are forma $S_n = An^2 + Bn$, unde A și B depind de a_1 și r. Scrie A și B în funcție de a_1 și r.

Pentru subiectul III, itemul 6 (selectarea modelului)

Ameliorare

Recunoaște tipul de progresie pas cu pas.

1. Pentru fiecare șir, calculează diferențele $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$ și rapoartele a_2/a_1, a_3/a_2. Apoi spune dacă șirul este PA, PG sau niciuna dintre ele.

   a) $4, 7, 10, 13, \ldots$

   b) $4, 8, 16, 32, \ldots$

   c) $4, 8, 12, 16, \ldots$

   d) $1, 4, 9, 16, \ldots$

2. Mihai depune 500 de lei. În fiecare lună adaugă 50 de lei. Notează cu a_n suma după n luni. Calculează a_1, a_2, a_3. Este PA sau PG? Care este rația?

Echivalent

Mihai are 1 500 de lei. Compară două opțiuni:

- **Opțiunea A:** adăugare anuală fixă de 200 de lei.
- **Opțiunea B:** dobândă compusă de 9% pe an, fără adăugiri.

a) Scrie formulele A_n și B_n.

b) Calculează A_5 și B_5. (Folosește $1{,}09^5 \approx 1{,}5386$.)

c) Calculează A_{15} și B_{15}. (Folosește $1{,}09^{15} \approx 3{,}6425$.)

d) Care opțiune este mai bună după 5 ani? Dar după 15 ani?

Dezvoltare

Punct de încrucișare. O firmă A își crește vânzările lunare în progresie aritmetică: $a_1 = 100$ de unități, $r = 30$ de unități/lună. O firmă B își crește vânzările în progresie geometrică: $b_1 = 100$ de unități, $q = 1{,}15$ (creștere de 15% lunar).

a) Calculează a_n și b_n pentru $n \in \{1, 5, 10, 15, 20, 25\}$ (folosește o foaie de calcul).

b) În care lună, pentru prima dată, firma B depășește firma A?

c) Calculează vânzările cumulate ale fiecărei firme în primele 24 de luni.

d) Discută: după un an, firma B are creștere mai mare decât A. De ce, totuși, în primele luni A pare „câștigătoare”?

Autoevaluare

Bifează enunțurile care descriu ce poți face singur, fără ajutor:

- ☐ Pot scrie primii termeni ai unui șir definit prin formulă explicită sau prin recurență.
- ☐ Pot trece de la o formulă de recurență la una explicită, pentru cazuri simple.
- ☐ Pot recunoaște dacă un șir este progresie aritmetică, calculând diferențele consecutive.
- ☐ Pot recunoaște dacă un șir este progresie geometrică, calculând rapoartele consecutive.
- ☐ Pot calcula termenul general a_n al unei progresii aritmetice (formula $a_n = a_1 + (n-1)r$).
- ☐ Pot calcula termenul general b_n al unei progresii geometrice (formula $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$).
- ☐ Pot calcula suma S_n a primilor n termeni ai unei progresii aritmetice.
- ☐ Pot calcula suma S_n a primilor n termeni ai unei progresii geometrice.
- ☐ Pot folosi caracterizarea prin trei termeni consecutivi (medie aritmetică / medie geometrică).
- ☐ Pot alege modelul potrivit (PA sau PG) pentru o situație practică (economii, dobândă, populație).
- ☐ Pot explica diferența dintre creșterea liniară și cea exponențială prin exemple concrete.

Cum interpretezi rezultatul?

- Dacă ai bifat **9–11 enunțuri**: stăpânești conținutul unității. Treci cu încredere la U3 și încearcă sarcinile marcate „Sinteză” și „Portofoliu” din lecțiile parcurse.
- Dacă ai bifat **6–8 enunțuri**: ești pe drumul cel bun. Reia sarcinile de tip „Echivalent” din secțiunea „Exersezi, corectezi, progresezi” înainte de a începe U3.
- Dacă ai bifat **0–5 enunțuri**: solicită sprijinul profesorului. Reia sarcinile de tip „Ameliorare” din secțiunea „Exersezi, corectezi, progresezi” împreună cu un coleg cu care lucrezi bine.

Reflectează:

- Când ai întâlnit ultima dată un context cotidian în care apare o progresie aritmetică sau geometrică?
- Care a fost cel mai dificil tip de problemă: cu termen general, cu sumă sau cu modelare?
- Cum poți folosi progresiile în plan personal: economisire, sport, planificarea timpului?

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE

U3

Funcții. Proprietăți generale ale funcțiilor

> *O funcție este, înainte de toate, o regulă: descrie cum o mărime depinde de alta. Învățarea matematicii devine mult mai ușoară când vezi această dependență întâi pe un grafic și apoi într-o formulă.*
>
> *— după ideile lui Felix Klein despre gândirea funcțională*

Lecțiile unității

- L3.1 — Funcții: definiție, exemple, modalități de descriere
- L3.2 — Reprezentarea grafică. Intersecția cu axele
- L3.3 — Semnul unei funcții. Soluțiile ecuațiilor $f(x) = m$ și $f(x) = g(x)$
- L3.4 — Proprietăți ale funcțiilor: monotonie, mărginire, paritate, convexitate
- L3.5 — Operații algebrice cu funcții. Compunerea funcțiilor
- L3.6 — Funcții injective, surjective, bijective, inversabile
- Recapitulare · Evaluare · Exersezi, corectezi, progresezi · Autoevaluare

Ce vei învăța

- să recunoști dependența dintre două mărimi și să o descrii printr-o funcție;
- să citești pe grafic proprietățile unei funcții;
- să operezi cu funcții și să compui funcții;
- să stabilești dacă o funcție este injectivă, surjectivă sau bijectivă;
- să modelezi situații reale cu ajutorul funcțiilor.



Lecția L3.1

Funcții: definiție, exemple, modalități de descriere

Amintește-ți!

În gimnaziu ai întâlnit funcții fără să le numești mereu așa: aria unui pătrat depinde de latura lui ($A = l^2$), distanța parcursă depinde de timp și viteză ($d = v \cdot t$), prețul total al cumpărăturilor depinde de cantitate ($P = p \cdot q$).

Toate aceste situații au în comun o regulă care leagă două mărimi.

1 Pentru fiecare situație de mai jos, identifică cele două mărimi puse în legătură. Care depinde de care?

a) Numărul de like-uri pe o postare în primele 24 de ore.

b) Costul unei călătorii cu taxiul în funcție de distanța parcursă.

c) Înălțimea la care se află o minge de baschet aruncată spre coș, măsurată la fiecare 0,1 secundă de la aruncare.

Observă și descoperă!

Andrei urmărește numărul de pași din aplicația de pe smartphone. La fiecare oră a zilei, aplicația îi dă o singură valoare: numărul total de pași făcuți până atunci.

2 Tabelul de mai jos arată numărul total de pași indicați de aplicație la cinci ore consecutive. Răspunde la întrebări:

Ora	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00
Pași	200	1 800	2 400	3 200	4 500

a) La ora 10:00, câți pași făcuse Andrei?

b) La ora 9:00, este posibil ca Andrei să fi făcut și 1 800, și 2 000 de pași? De ce?

c) Cum interpretezi afirmația „pentru fiecare oră, aplicația dă exact o singură valoare”?

3 Discută cu colegul: care este diferența esențială dintre afirmațiile „la ora X, Andrei avea exact N pași” și „în orele apropiate de X, Andrei avea între 1 500 și 2 200 de pași”?

★ Important!

Definiție. Fie A și B două mulțimi nevide. Numim *funcție definită pe A cu valori în B* o regulă (sau corespondență) care asociază **fiecărui element** $x \in A$ **un singur element** $y \in B$. Notăm $f : A \to B$, iar elementul asociat lui x se notează $f(x)$.

- Mulțimea A se numește *domeniul de definiție* al funcției.
- Mulțimea B se numește *codomeniul* funcției, adică mulțimea în care se află valorile asociate elementelor din A.
- Pentru $x \in A$, $f(x)$ se numește *imaginea lui x prin f* (sau *valoarea funcției în x*).

Modalități de a descrie o funcție.

1. **Prin formulă (lege analitică).** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$.
2. **Prin tabel de valori (când domeniul este o mulțime finită).**
   De exemplu, pentru $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$:

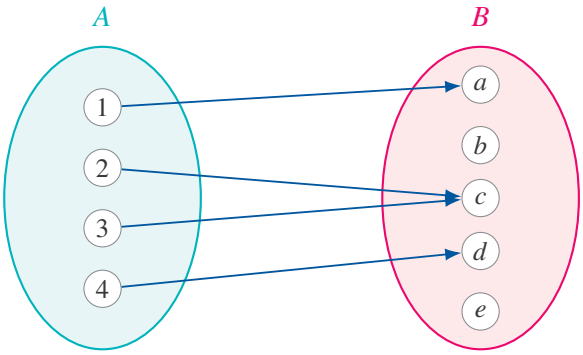
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	1	3	5	7

3. **Prin diagramă Venn-Euler.** Mulțimile A și B sunt reprezentate prin două cercuri distincte, iar săgețile indică asocierea fiecărui element din A cu un singur element din B.
4. **Prin grafic, cu ajutorul reperului cartezian.** Mulțimea de puncte $\{(x, f(x)) : x \in A\}$.
5. **Prin descriere verbală.** „f asociază fiecărui număr natural pătratul său”.
6. **Prin mai multe formule (funcție definită pe ramuri).** $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } x \geq 0; \\ -x+1, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$

Funcții egale. Două funcții $f : A \to B$ și $g : C \to D$ sunt egale dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in A$.

Restricția unei funcții. Fie $f : A \to B$ și $A' \subseteq A$. Funcția $f|_{A'} : A' \to B$, definită prin $f|_{A'}(x) = f(x)$ pentru orice $x \in A'$, se numește *restricția lui f la A'*.

Imaginea unei funcții. Mulțimea $\operatorname{Im} f = f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$.
Dacă $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ este finită, atunci $\operatorname{Im} f = \{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\}$ (cu eliminarea repetărilor).



Fiecărui element din A îi corespunde un singur element din B.

★ Important!

Funcții uzuale (cu denumire).

- **Funcția constantă.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$ fix.
- **Funcția identică.** $\mathrm{id}_A:A\to A$, $\mathrm{id}_A(x)=x$ pentru orice $x\in A$.
- **Funcția afină.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$ cu $a,b\in\mathbb{R}$. (Caz particular: *funcția liniară*, când $b=0$.)
- **Funcția modul.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$, definită prin

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{dacă } x\geq 0;\\ -x, & \text{dacă } x<0.\end{cases}$$

  Este un exemplu important de funcție definită pe două ramuri afine.
- **Funcția parte întreagă.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=[x]$, unde $[x]$ este cel mai mare număr întreg $\leq x$.
  Exemple: $[3{,}7]=3$, $[-2{,}3]=-3$, $[5]=5$.
- **Funcția parte fracționară.** $f:\mathbb{R}\to[0,1)$, $f(x)=\{x\}=x-[x]$.
  Exemple: $\{3{,}7\}=0{,}7$, $\{-2{,}3\}=-2{,}3-(-3)=0{,}7$, $\{5\}=0$.

Bine de știut!

Capcane frecvente.

- Pentru ca o regulă să fie funcție, trebuie să asocieze *fiecărui* element din A *un singur* element din B. Dacă unui $x\in A$ nu îi corespunde nimic sau îi corespund două valori distincte, regula *nu este* funcție.
- Pentru funcții cu valori numerice, scrierea $f(x)=\dfrac{1}{x}$ are sens doar pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, deoarece împărțirea la zero nu este definită.
- Atenție la partea întreagă a numerelor negative: $[-2{,}3]=-3$, nu -2.

Aplicație digitală

Folosește **Desmos** (`www.desmos.com`) sau **GeoGebra** (`www.geogebra.org`) pentru a vizualiza funcții uzuale.

- Scrie pe rânduri separate: `f(x) = 2x + 3`, `g(x) = abs(x)`, `h(x) = floor(x)`, `k(x) = x - floor(x)`.
- Desmos va desena automat graficele. Compară-le. Care grafice se pot trasa fără să ridici creionul de pe hârtie? Care au „trepte” sau „salturi”?
- Schimbă coeficienții funcției f și observă cum se schimbă graficul. Descrie efectul.

Exersează!

Identifică relația funcțională

4 Stabilește dacă fiecare regulă definește o funcție $f:\{1,2,3,4\}\to\{a,b,c,d\}$. Dacă nu, justifică.

a) $f(1)=a, f(2)=a, f(3)=b, f(4)=c$;

b) $f(1)=a, f(2)=b, f(2)=c, f(3)=d$;

c) $f(1)=a, f(3)=b, f(4)=d$ (lui 2 nu i se asociază nimic).

5 Pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-5$, calculează:

a) $f(2), f(0), f(-1), f\left(\frac{1}{3}\right)$;

b) valoarea lui x pentru care $f(x)=7$.

Domeniul, codomeniul, imaginea

6 Pentru $f:\{-2,-1,0,1,2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, scrie tabelul de valori și determină $\operatorname{Im} f$.

Model de rezolvare:

$f(-2)=4, f(-1)=1, f(0)=0, f(1)=1, f(2)=4$. Așadar $\operatorname{Im} f=\{0,1,4\}$.

7 Pentru funcția modul $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$:

a) Calculează $f(-3), f(0), f(5), f(-1{,}2)$.

b) Determină $\operatorname{Im} f$.

8 Pentru funcțiile parte întreagă și parte fracționară, calculează:

a) $[7{,}3]; [-7{,}3]; [0]; [-0{,}5]$.

b) $\{7{,}3\}; \{-7{,}3\}; \left(1+\sqrt{2}\right)\left\{\sqrt{2}\right\}; \left[\frac{1}{1-\sqrt{3}}\right]; \left[\sqrt{101}\right]+5\cdot\left\{-\frac{2}{5}\right\}$.

c) $\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]+\cdots+\left[\sqrt{10\cdot 11}\right]$.

9 Determină cel mai mic număr natural nenul a și numărul întreg b pentru care $\left\{\sqrt{2}\right\}\left(a+b\sqrt{2}\right)\in\mathbb{Z}$.

10 Determină valoarea de adevăr a fiecăreia dintre propozițiile:

a) p: „$\exists a, b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea: $\{a\} + \{b\} = 1$”;

b) q: „$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea: $\{a\} + \{b\} = 1$”;

c) r: „$\exists a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea: $\{a\} + \{b\} = 1$”.

Folosirea limbajului matematic

11 Mihai cumpără bilete la cinema. Un bilet costă 25 de lei, iar la costul total se adaugă un comision unic de 5 lei.

a) Notează cu $f(n)$ costul total pentru n bilete cumpărate. Scrie formula lui f.

b) Care este domeniul de definiție al funcției f? Justifică.

c) Calculează $f(1), f(3), f(10)$.

12 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită pe ramuri: $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \geq 1; \\ x+1, & \text{dacă } x < 1. \end{cases}$

a) Calculează $f(0), f(1), f(2), f(-3)$.

b) Sunt cele două formule egale în $x = 1$? Verifică prin calcul direct.

13 Calculează sumele indicate în fiecare dintre cazurile de mai jos.

a) Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Calculează sumele

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} f(k) \quad \text{și} \quad S_2 = \sum_{k=1}^{n} f\left(2^k\right).$$

b) Considerăm funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x + 1$. Calculează sumele

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} g(k) \quad \text{și} \quad S_2 = \sum_{k=1}^{n} g\left(2^k\right).$$

c) Considerăm funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } x \leq 1; \\ x-1, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$

Calculează suma

$$S = \sum_{k=-2026}^{2026} h(k).$$

Funcții egale și restricții

14 Stabilește dacă funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt egale: $f(x) = (x+1)^2$ și $g(x) = x^2 + 2x + 1$. Justifică.

15 Pentru funcția $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, scrie restricția $f|_{[0,3]}$. Care este imaginea ei?

16 ☆ **Portofoliu.** Pentru $\{x\} = x - [x]$, arată că $\{x\} \in [0, 1)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Apoi calculează $\{2{,}5\} + \{-1{,}5\}$. Care e rezultatul? Te-ai fi așteptat la $\{2{,}5 + (-1{,}5)\} = \{1\} = 0$?

Lecția L3.2

Reprezentarea grafică. Intersecția cu axele

Amintește-ți!

În gimnaziu ai învățat că, într-un reper cartezian xOy, fiecare punct este descris de o pereche (x,y) de coordonate. Graficul unei funcții $f : A \to B$ (cu $A, B \subseteq \mathbb{R}$) este mulțimea tuturor punctelor de forma $(x, f(x))$, unde x parcurge A.

1. Pe o foaie cu pătrățele, reprezintă într-un reper cartezian funcția $f : \{-2,-1,0,1,2,3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x-1$. Adică marchează pe rând punctele $(-2,-5), (-1,-3), (0,-1), (1,1), (2,3), (3,5)$.
2. Discută cu colegul: ce observi despre cele șase puncte? Sunt ele coliniare?

Observă și descoperă!

Andreea aruncă o minge de baschet către coș. Înălțimea h (în metri) a mingii la momentul t (în secunde) este aproximată de $h(t) = -5t^2 + 6t + 1{,}9$, $0 \le t \le 1{,}4$.

3. Completează tabelul cu valorile înălțimii la momentele indicate:

t (s)	0	0,2	0,5	0,6	1	1,2	1,4
$h(t)$ (m)	1,9				2,9		

4. Pe baza tabelului, răspunde:
   a) De la ce înălțime a fost aruncată mingea? (Adică $h(0) = ?$)
   b) Care este înălțimea maximă atinsă, aproximativ?
   c) Aproximativ în ce moment atinge mingea punctul cel mai înalt?
   d) După câte secunde înălțimea revine la 1,9 m?
5. Discută cu colegul: dacă reprezinți punctele într-un reper, ce formă va avea graficul? La ce e util să o vezi?

★ Important!

Definiție. Fie $f : A \to B$ cu $A, B \subseteq \mathbb{R}$. *Graficul* funcției f este mulțimea

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Pentru a reprezenta grafic o funcție:

1. alegem un reper cartezian xOy;
2. construim un tabel de valori $(x, f(x))$ pentru câteva valori reprezentative ale lui x;
3. marcăm punctele corespunzătoare;
4. dacă A este un interval, unim punctele ținând seama de forma cunoscută a graficului (atenție: graficul poate avea „salturi”, ca la funcția parte întreagă); dacă A este o mulțime finită, lăsăm punctele izolate.

Cazul funcției afine. Pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$, graficul este o *dreaptă*. În particular:

- dacă $a = 0$, graficul este o dreaptă orizontală $y = b$;
- dacă $a \neq 0$, graficul este o dreaptă oblică, de pantă a, care intersectează axa Oy în punctul $(0, b)$.

Intersecția graficului cu axele.

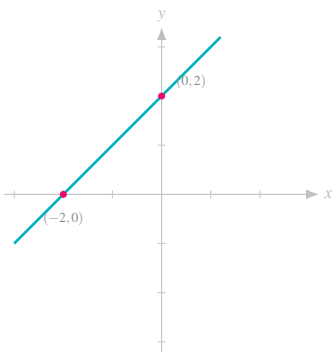
- **Cu axa Oy.** Punctul $(0, f(0))$, cu condiția ca $0 \in A$ (domeniul). Există cel mult un punct.
- **Cu axa Ox.** Punctele $(x, 0)$ unde $f(x) = 0$. Aceste valori ale lui x se numesc *rădăcini* (sau *zerouri*) ale funcției.

Drepte particulare în plan.

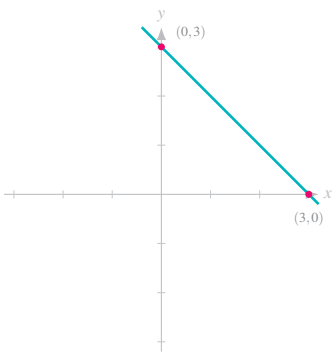
- Dreapta $\{(x, y) : x = m\}$, $m \in \mathbb{R}$, este *verticală* (paralelă cu Oy).
- Dreapta $\{(x, y) : y = m\}$, $m \in \mathbb{R}$, este *orizontală* (paralelă cu Ox).

Acestea sunt utile pentru a localiza intersecții: de exemplu, a determina $G_f \cap \{y = m\}$ înseamnă a găsi punctele graficului pentru care $f(x) = m$.

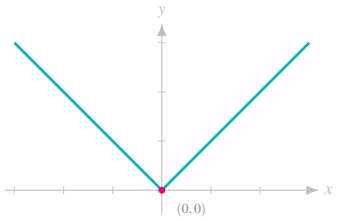
Test cu drepte verticale. Un grafic dintr-un reper cartezian reprezintă o funcție dacă și numai dacă *orice dreaptă verticală* $x = m$ taie graficul în *cel mult un* punct. (Justificare: dacă o dreaptă $x = m$ ar tăia graficul în două puncte, atunci m ar fi asociat cu două valori $f(m)$ diferite — contradicție cu definiția funcției.)



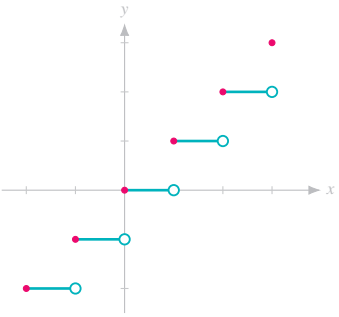
$f(x) = x + 2$



$g(x) = -x + 3$



$h(x) = |x|$



$k : [-2,3] \to \mathbb{R}$, $k(x) = [x]$

Aplicație digitală

Folosește **Desmos** pentru a verifica reprezentări grafice.

- Scrie pe rânduri separate: $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -x + 4$.
- Folosește instrumentul „zoom”. Apropie-te de punctele de intersecție cu axele: cum se citesc coordonatele?
- Scrie $h(x) = ax + b$ și adaugă cursoare (glisoare) pentru parametrii a și b. Modifică valorile lor și observă cum se rotește, respectiv cum se translatează dreapta.

Exersează!

Identifică puncte semnificative pe graficul unei funcții

6 Pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 6$:

a) Determină punctul de intersecție al graficului cu axa Oy.

b) Determină punctul de intersecție al graficului cu axa Ox.

c) Reprezintă graficul folosind cele două puncte.

Model de rezolvare a): $f(0) = 3 \cdot 0 - 6 = -6$. Punctul este $(0, -6)$.
Model de rezolvare b): Rezolvăm $f(x) = 0 \iff 3x - 6 = 0 \iff x = 2$. Punctul este $(2, 0)$.

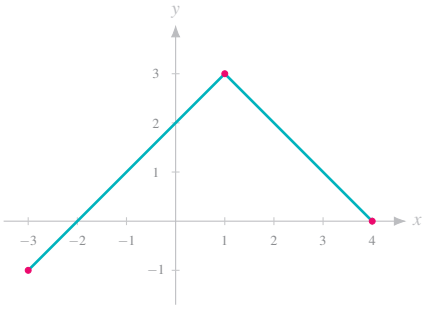
7 Pentru $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -2x + 8$, determină intersecțiile graficului cu cele două axe și reprezintă grafic funcția.

8 Privește graficul funcției $f:[-3,4]\to\mathbb{R}$ și citește:

a) Care este $f(0)$?

b) Pentru ce valori ale lui x avem $f(x)=0$?

c) Pentru ce valori ale lui x avem $f(x)=2$?



Extrage informații din reprezentări grafice

9 Reprezintă grafic funcția modul $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$ pe intervalul $[-3,3]$.

a) Care este $f(0)$? Există intersecție cu axa Oy?

b) Pentru ce valori ale lui x avem $f(x)=0$? (Adică intersecția cu Ox.)

c) Câte rădăcini are funcția modul?

10 Se consideră funcția definită pe ramuri:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}x+2, & \text{dacă } x\le 1;\\ -x+4, & \text{dacă } x>1.\end{cases}$$

a) Calculează $f(-2), f(0), f(1), f(2), f(3)$.

b) Reprezintă graficul (două semidrepte cu originea în punctul $(1,3)$).

c) Determină intersecțiile cu axele.

11 Considerăm funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Reprezintă grafic funcțiile f și g dacă:

a) $f(x)=x-3$ și $g(x)=|x-3|$;

b) $f(x)=2x+3$ și $g(x)=|2x+3|$.

Ce observi? Cum poți reprezenta grafic funcția g folosind graficul funcției f?

12 Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Reprezintă grafic funcția f pe intervalul precizat și determină intersecțiile graficului cu axele de coordonate dacă:

a) $f(x)=|-2x+1|$ pe intervalul $(-4,3]$;

b) $f(x)=|-x-3|$ pe intervalul $[-3,3)$;

c) $f(x)=|2x-6|-3$ pe $[-4,+\infty)$;

d) $f(x) = -|2x-4|+6$ pe $(-\infty, 5]$.

13 Considerăm funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și funcțiile $h_1, h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_1(x) = \min(f(x), g(x))$ și $h_2(x) = \max(f(x), g(x))$. Reprezintă grafic funcțiile h_1 și h_2 și determină intersecțiile graficelor funcțiilor h_1 și h_2 cu axele de coordonate dacă:

a) $f(x) = 2x+1$ și $g(x) = 4x-1$;

b) $f(x) = x-1$ și $g(x) = -4x-1$.

Indicație:

$$\max(f(x), g(x)) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) \geq g(x); \\ g(x), & \text{dacă } f(x) < g(x) \end{cases} \quad \text{și} \quad \min(f(x), g(x)) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) \leq g(x); \\ g(x), & \text{dacă } f(x) > g(x). \end{cases}$$

14 Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și funcțiile $h_1, h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_1(x) = [f(x)]$ și $h_2(x) = \{f(x)\}$. Reprezintă grafic funcțiile h_1 și h_2 pe intervalul precizat:

a) $f(x) = 2x-1$ pe intervalul $[0, 2]$;

b) $f(x) = -x-3$ pe intervalul $[-3, 3]$;

c) $f(x) = x^2$ pe $[0, 2]$;

d) $f(x) = 2x+3$ pe $\mathbb{R}$.

Coordonate semnificative în context practic

15 O firmă vinde tricouri imprimate. Costul total C (în lei) pentru a produce n tricouri este $C(n) = 8n+200$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculează $C(0), C(10), C(50)$.

b) Care este semnificația lui $C(0) = 200$ în contextul problemei?

c) Care este costul producerii a 30 de tricouri?

16 Andreea aruncă o minge. Înălțimea (în metri) la momentul t (în secunde) este aproximativ $h(t) = -5t^2 + 10t + 2$, de la aruncare până când mingea atinge solul.

a) Care este înălțimea inițială (la momentul $t = 0$)?

b) Calculează $h(1)$. Aceasta este înălțimea maximă, după cum vei vedea în U4.

c) După aproximativ câte secunde mingea atinge solul ($h = 0$)? (Indicație: calculează $h(2,1)$ și $h(2,2)$ și compară semnele lor.)

17 ☆ **Portofoliu.**

a) O dreaptă $y = ax + b$ trece prin punctele $(2, 5)$ și $(-1, -1)$. Determină a și b. Apoi calculează intersecțiile cu axele.

b) Graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ taie axa Oy într-un punct cu ordonata egală cu -3 și trece prin punctele $(1, -4)$ și $(-1, 0)$. Determină a, b și c. Determină intersecțiile graficului cu axele de coordonate. Folosește aplicația *Desmos* sau *GeoGebra* pentru a reprezenta grafic funcția f.

Lecția L3.3

Semnul unei funcții. Soluțiile ecuațiilor $f(x)=m$ și $f(x)=g(x)$

Amintește-ți!

Un grafic spune mai mult decât poate citi cineva într-o ecuație. Gândește-te la graficul unei funcții: ce înseamnă că, pe o anumită zonă, graficul este *deasupra* axei Ox? Dar *dedesubtul* axei Ox? Cum ai citi pe grafic numărul soluțiilor ecuației $f(x)=3$?

1 Alege o funcție de forma $f(x)=ax+b$, cu a și b numere reale. Reprezintă grafic funcția, apoi răspunde:

a) Pentru ce valori ale lui x graficul este deasupra axei Ox?

b) Pentru ce valori ale lui x graficul este sub axa Ox?

c) Câte soluții are ecuația $f(x)=3$? Cum le poți identifica pe grafic?

Observă și descoperă!

2 Maria și Andrei cumpără bilete la un concert. Maria a plătit 3 bilete cu b lei fiecare, plus un comision de 20 de lei: $M(b)=3b+20$. Andrei a plătit 5 bilete cu același preț b, fără comision: $A(b)=5b$.

a) Pentru ce preț b Maria și Andrei plătesc același total? (Adică $M(b)=A(b)$.)

b) Pentru ce prețuri b Maria plătește mai puțin decât Andrei? (Adică $M(b)<A(b)$.)

3 Reprezintă pe același reper graficele lui $M(b)=3b+20$ și $A(b)=5b$. Ce semnificație are punctul de intersecție al celor două grafice? Cum se vede grafic intervalul în care $M(b)<A(b)$?

4 Discută cu colegul: rezolvarea unei ecuații $f(x)=g(x)$ se reduce la a găsi *abscisele* punctelor de intersecție ale celor două grafice. De ce?

★ Important!

Semnul unei funcții. Fie $f:A\to\mathbb{R}$ cu $A\subseteq\mathbb{R}$. Pentru fiecare $x\in A$:

- dacă $f(x)>0$, spunem că funcția este *strict pozitivă* în x (graficul deasupra axei Ox);
- dacă $f(x)<0$, spunem că funcția este *strict negativă* în x (graficul sub axa Ox);
- dacă $f(x)=0$, x se numește *rădăcină* (sau *zero*) a funcției.

Tabelul de semn al unei funcții afine. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, cu $a\neq 0$. Rădăcina este $x_0=-b/a$. Tabelul de semn:

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x)$		semn contrar lui a	0	semnul lui a	

Pe scurt: „$f(x)$ are semn contrar lui a înainte de rădăcină și semnul lui a după rădăcină”.

Interpretarea geometrică a soluțiilor ecuației $f(x)=m$. Fie $f:A\to\mathbb{R}$ și $m\in\mathbb{R}$. Soluțiile ecuației $f(x)=m$ sunt *abscisele* punctelor de intersecție ale graficului G_f cu dreapta orizontală $y=m$.

- Numărul de soluții = numărul de puncte de intersecție.
- Caz particular $m=0$: soluțiile sunt rădăcinile funcției (intersecția cu axa Ox).

Interpretarea geometrică a soluțiilor ecuației $f(x)=g(x)$. Fie $f,g:A\to\mathbb{R}$. Soluțiile ecuației $f(x)=g(x)$ sunt *abscisele* punctelor de intersecție ale graficelor G_f și G_g.

Bine de știut!

De ce ne este utilă interpretarea geometrică?

- ne permite să *numărăm* rapid soluțiile, fără să le calculăm;
- ne ajută să *vizualizăm* mulțimile pe care $f(x)>g(x)$, respectiv $f(x)<g(x)$;
- arată *intuitiv* dacă o ecuație este imposibilă (când graficele nu se intersectează).

Aplicație digitală

Folosește **Desmos** pentru a vizualiza intersecții.

- Scrie pe rânduri separate: $f(x)=2x-4$ și $y=3$.
- Desmos va marca automat punctele de intersecție. Citește abscisele: ele sunt soluțiile ecuației $2x-4=3$.
- Acum scrie $g(x)=x^2-4$ și $y=5$. Câte soluții are ecuația $x^2-4=5$? Verifică citind direct din grafic.
- Modifică valoarea m în $y=m$. Pentru ce valori ale lui m ecuația $x^2-4=m$ are 0, 1, 2 soluții?

Exersează!

Extragerea semnului din grafic

5 Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+12$:

a) Determină rădăcina funcției.

b) Construiește tabelul de semn.

c) Pentru ce valori ale lui x avem $f(x)>0$? Dar $f(x)<0$? Dar $f(x)\geq 0$?

Model de rezolvare a): $f(x)=0 \iff -3x+12=0 \iff x=4$.

Model de rezolvare b): Coeficientul lui x este $a=-3<0$. Tabelul de semn:

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

6 Pentru fiecare funcție, fă tabelul de semn:

a) $f(x)=2x-6$; b) $g(x)=-x+5$; c) $h(x)=4x+8$.

7 Pentru fiecare funcție, fă tabelul de semn:

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$;

b) $f(x)=(x+1)(x-2)$;

c) $f(x)=4-x^2$;

d) $f(x)=\dfrac{x+1}{-2x-1}$;

e) $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{-x-3}$.

Model de rezolvare a): Construim tabelul de semn pentru funcția f:

x	$-\infty$			-1		1			$+\infty$
$x-1$		$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$x+1$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$		$+$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	$+$	

Soluții ale ecuațiilor și inecuațiilor prin lectură grafică

8 Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$, rezolvă pe cale algebrică și prin lectură grafică:

a) $f(x)=5$;

b) $f(x)=-3$;

c) $f(x)=0$;

d) $f(x)\le 1$;

e) $-2\le f(x)<1$.

9 Rezolvă pe cale algebrică, construind tabelul de semn, și prin lectură grafică, folosind aplicația *Desmos* sau *GeoGebra*:

a) $\dfrac{x-1}{x+1}\ge 0$;

b) $\dfrac{x-1}{-2x+1}<0$;

c) $\dfrac{x}{2x-1}\le 1$;

d) $\dfrac{-x-1}{-3x+1}\ge 2$;

e) $x+\dfrac{1}{x}\ge 0$;

f) $x-\dfrac{1}{x}<0$;

g) $0<\dfrac{2x+1}{x-1}\le 1$;

h) $\left[\dfrac{3x-1}{x}\right]=-1$.

10 Determină numerele reale a și b dacă:

a) $\dfrac{x+a}{x+b}\le 0 \iff x\in[-1,1)$;

b) $\dfrac{x+a}{x+b}\le -1 \iff x\in[-1,1)$;

c) $\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\dfrac{x-2}{x+5}>-1\right\}=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$;

d) $\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\dfrac{2x+3}{x+1}<-2\right\}=(a,b)$.

11 Folosind reprezentarea grafică a funcției modul $f(x)=|x|$:

a) Câte soluții are ecuația $|x| = 3$? Care sunt acestea?

b) Câte soluții are ecuația $|x| = -2$? De ce?

c) Câte soluții are ecuația $|x| = 0$?

Soluții ale ecuației $f(x) = g(x)$

12 Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ și $g(x) = -x + 7$.

a) Reprezintă pe același reper cele două grafice (drepte).

b) Determină punctul de intersecție.

c) Pentru ce valori ale lui x avem $f(x) > g(x)$? (Adică graficul lui f este deasupra graficului lui g.)

Model de rezolvare b): $f(x) = g(x) \iff 2x + 1 = -x + 7 \iff 3x = 6 \iff x = 2$. Punctul este $(2, f(2)) = (2, 5)$.

13 Folosind aplicația *Desmos* sau *GeoGebra*, determină numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = m$ în funcție de valorile parametrului real m, dacă:

a) $f(x) = x^2 - 2x$;

b) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$;

c) $f(x) = x^3 - 3x + 5$;

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$.

Aplicație practică

14 Două firme oferă servicii de internet:

- **Firma A:** abonament fix de 50 de lei pe lună, plus 0,2 lei/GB consumat.
- **Firma B:** abonament fix de 30 de lei pe lună, plus 0,5 lei/GB consumat.

Notează cu $C_A(x)$ și $C_B(x)$ costurile lunare în funcție de numărul x de GB consumați.

a) Scrie formulele pentru C_A și C_B.

b) Pentru ce valori ale lui x firma A este mai ieftină decât firma B? (Adică $C_A(x) < C_B(x)$.)

c) Pentru un consum de 80 GB, care firmă este mai avantajoasă? Justifică prin calcul.

15 ☆ **Portofoliu.** Considerăm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = m \cdot x + 1$, unde m este parametru real.

a) Pentru ce valori ale lui m funcția nu are rădăcini reale? (Indicație: f este afină; analizează cazurile.)

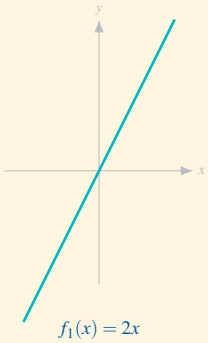
b) Pentru $m = 2$, determină rădăcina și fă tabelul de semn.

Lecția L3.4

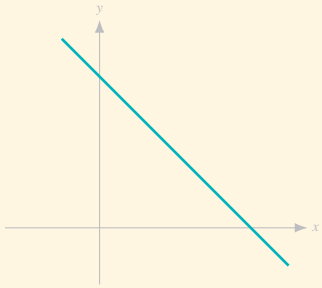
Proprietăți ale funcțiilor: monotonie, mărginire, paritate, convexitate

Amintește-ți!

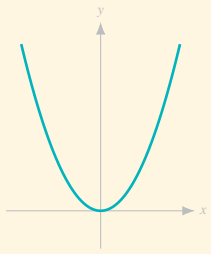
Privește graficele celor patru funcții de mai jos:



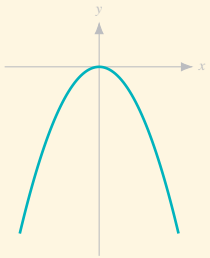
$f_1(x) = 2x$



$f_2(x) = -x+4$



$f_3(x) = x^2$



$f_4(x) = -x^2$

Răspunde rapid:

1. Care dintre funcții „urcă” tot timpul când x crește? Care „coboară”?
2. Care dintre funcții are o valoare minimă? Care are o valoare maximă? Există funcții fără minim sau fără maxim?
3. Pentru ce funcții graficul este simetric față de axa Oy? (Adică, dacă îndoi foaia de-a lungul axei Oy, cele două părți ale graficului se suprapun.)

Observă și descoperă!

Vom defini, una după alta, patru proprietăți pe care le „vedem” deja pe grafice.

Monotonie. Andrei și Maria privesc o aplicație care arată numărul de pași zilnici în ultima lună. Numărul a_k de pași făcuți de Andrei în ziua k a crescut de la o zi la alta: $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{30}$. Numărul zilnic de pași al Mariei a oscilat: a crescut o săptămână, apoi a scăzut, apoi a crescut din nou.

4. Cum descrii *în general* (formal) un șir sau o funcție care „doar crește”? Folosește notații matematice.

Mărginire. Înălțimea mingii de baschet din lecția L3.2 a fost, în primele 1,2 secunde, cuprinsă între 1,9 m și 3,7 m. Temperatura unui frigider este între $-2°$C și $5°$C. Numărul de minute în care aleargă cineva

într-o săptămână poate fi orice valoare între 0 și $7 \cdot 24 \cdot 60 = 10\,080$ de minute.

5 Discută cu colegul: ce înseamnă că o funcție „nu poate lua valori prea mari” sau „prea mici”?

Paritate / Simetria graficului. Pentru funcția $f(x) = x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	9	4	1	0	1

6 Calculează $f(2)$ și $f(3)$. Compară cu $f(-2)$ și $f(-3)$. Ce observi?

★ **Important!**

1. Monotonie. Fie $f : A \to \mathbb{R}$ și $I \subseteq A$.

- f este *strict crescătoare* pe I dacă, pentru orice $x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) < f(x_2)$.
- f este *strict descrescătoare* pe I dacă, pentru orice $x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) > f(x_2)$.
- Funcția f este *crescătoare* pe I dacă, pentru orice $x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Analog pentru *descrescătoare*.

Test cu raportul de variație. Pentru f definită pe un interval I, f este strict crescătoare dacă și numai dacă, pentru orice $x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 \neq x_2$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0.$$

Analog, funcția f este strict descrescătoare pe I dacă și numai dacă, pentru orice $x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 \neq x_2$, avem

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0.$$

Aplicație: funcția afină $f(x) = ax + b$ pe $\mathbb{R}$: pentru $x_1 < x_2$,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = a.$$

Așadar f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă $a > 0$, strict descrescătoare dacă $a < 0$, constantă dacă $a = 0$.

Lectura grafică: pe un grafic, f este strict crescătoare pe un interval dacă graficul „urcă” când mergi de la stânga la dreapta; strict descrescătoare dacă „coboară”.

★ **Important!**

2. Mărginire. Fie $f : A \to \mathbb{R}$.

- f este *mărginită superior* dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) \leq M$ pentru orice $x \in A$.
- f este *mărginită inferior* dacă există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) \geq m$ pentru orice $x \in A$.
- f este *mărginită* dacă este mărginită și superior, și inferior. Echivalent: există $C > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq C$ pentru orice $x \in A$.

Lectura grafică: pe un grafic, f este mărginită superior dacă graficul nu „urcă" la infinit (rămâne sub o dreaptă orizontală $y = M$); mărginită inferior dacă nu „coboară" la infinit.

Exemple.

- Funcția $f(x) = x^2$ pe $\mathbb{R}$ este mărginită inferior ($f(x) \geq 0$), dar nu mărginită superior.
- Funcția $f(x) = |x|$ pe $\mathbb{R}$ este mărginită inferior ($f(x) \geq 0$), nu mărginită superior.
- Funcția afină $f(x) = ax + b$ pe $\mathbb{R}$ cu $a \neq 0$ *nu* este mărginită (nici superior, nici inferior).
- Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$ (parte fracționară), este mărginită: $0 \leq f(x) < 1$.

★ **Important!**

3. Paritate / Imparitate. Fie $f : A \to \mathbb{R}$, cu A *simetrică* față de 0 (adică $x \in A \iff -x \in A$).

- f este *pară* dacă $f(-x) = f(x)$ pentru orice $x \in A$.
  Lectura grafică: graficul este simetric față de axa Oy.
- f este *impară* dacă $f(-x) = -f(x)$ pentru orice $x \in A$.
  Lectura grafică: graficul este simetric față de origine (rotația de 180° în jurul lui O îl lasă neschimbat).

Exemple.

- $f(x) = x^2$ este pară: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
- $f(x) = x^3$ este impară: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.
- $f(x) = |x|$ este pară: $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$.
- $f(x) = ax + b$ cu $a \neq 0$ și $b \neq 0$ *nu* este nici pară, nici impară. (Ești invitat să verifici!)

★ **Important!**

4. Convexitate / Concavitate. Fie I un interval al lui $\mathbb{R}$ și fie $f : I \to \mathbb{R}$. Funcția f este *convexă* pe I dacă, pentru orice $x_1, x_2 \in I$ și orice $t \in [0,1]$, avem

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Funcția f este *concavă* pe I dacă, pentru orice $x_1, x_2 \in I$ și orice $t \in [0,1]$, avem

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Interpretare geometrică intuitivă.

- f este convexă pe I dacă, pentru orice două puncte $A_1 = (x_1, f(x_1))$ și $A_2 = (x_2, f(x_2))$ de pe grafic, segmentul $[A_1A_2]$ este *deasupra* arcului de grafic dintre cele două puncte (sau pe acesta).
- f este concavă pe I dacă segmentul $[A_1A_2]$ este *sub* (sau pe) arcul de grafic.

Imagine intuitivă. Convexă = „formă de cupă”; concavă = „formă de boltă”.

Exemple.

- $f(x) = x^2$ este convexă pe $\mathbb{R}$: pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ și $t \in [0,1]$, $(1-t)x_1^2 + tx_2^2 - \big((1-t)x_1 + tx_2\big)^2 = t(1-t)(x_1 - x_2)^2 \geq 0$.
- $f(x) = -x^2$ este concavă pe $\mathbb{R}$ (se înmulțește inegalitatea de mai sus cu -1).
- Funcția afină $f(x) = ax + b$ este în același timp convexă și concavă pe $\mathbb{R}$ (graficul este o dreaptă, deci orice segment $[A_1A_2]$ cu capetele pe grafic este conținut în grafic).

Sumar: ce vezi pe un grafic?

Proprietate	Cum o vezi pe grafic
Strict crescătoare pe I	Graficul urcă pe I (de la stânga la dreapta)
Strict descrescătoare pe I	Graficul coboară pe I
Mărginită superior	Există o dreaptă orizontală deasupra întregului grafic
Mărginită inferior	Există o dreaptă orizontală sub întregul grafic
Pară	Simetrie față de axa Oy
Impară	Simetrie față de origine
Convexă pe I	Graficul are „formă de cupă” (segmentele cu capetele pe grafic sunt deasupra graficului)
Concavă pe I	Graficul are „formă de boltă” (segmentele cu capetele pe grafic sunt sub grafic)

Aplicație digitală

Folosește **Desmos** pentru a explora proprietățile funcțiilor.

- Reprezintă $f(x) = x^2$ și $g(x) = x^3$. Care este pară? Care impară? Verifică prin lectură grafică.
- Reprezintă $h(x) = x^2 - 4$. Pe ce intervale h este crescătoare? Pe ce intervale este descrescătoare?

- În Desmos, reprezintă funcția $k(x) = ax^2$. Alege mai multe valori pentru a, de exemplu: $a = 2$, $a = 1$, $a = 0{,}5$, $a = -0{,}5$, $a = -1$, $a = -2$. Observă cum se schimbă graficul. Ce se întâmplă când a este pozitiv? Ce se întâmplă când a este negativ?

Exersează!

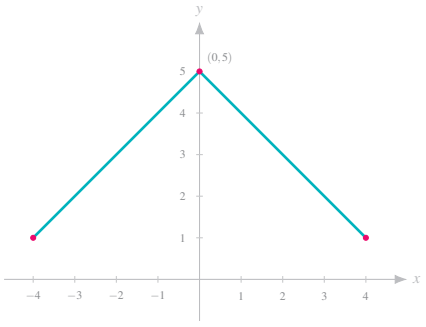
Identificarea proprietăților prin lectură grafică

7 Pe graficul de mai jos al funcției $f : [-4,4] \to \mathbb{R}$:

a) Pe ce interval f este crescătoare? Dar descrescătoare?

b) Care este $\max f(x)$? Pentru ce valoare a lui x se atinge?

c) Este f mărginită? Dacă da, indică numere reale m și M astfel încât $m \leq f(x) \leq M$ pentru orice $x \in [-4,4]$.



Justifică monotonia și paritatea

8 Demonstrează că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$, este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Model de rezolvare: Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $x_1 < x_2$. Atunci $5x_1 < 5x_2 \iff 5x_1 - 3 < 5x_2 - 3 \iff f(x_1) < f(x_2)$. Așadar f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. □

9 Pentru fiecare funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determină valorile reale ale lui m pentru care funcția f este strict crescătoare.

a) $f(x) = (m-1)x + 2$;

b) $f(x) = (-2m+1)x + 3$;

c) $f(x) = \left(\dfrac{m-1}{m}\right)x + 2$;

d) $f(x) = \left(\dfrac{-m-1}{2m+1}\right)x + 2$;

e) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } x \leq 1; \\ 2x - m, & \text{dacă } x > 1; \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } x \leq 2; \\ mx - (m+2), & \text{dacă } x > 2. \end{cases}$

10 Pentru fiecare funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determină valorile reale ale lui m pentru care funcția f este strict descrescătoare.

a) $f(x)=\left(\dfrac{m-1}{m}\right)x+2$;

b) $f(x)=\left(\dfrac{-m-1}{2m+1}\right)x+2$;

c) $f(x)=\begin{cases}-x+1, & \text{dacă } x\le 1;\\ -2x-m, & \text{dacă } x>1;\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}-mx+1, & \text{dacă } x\le 2;\\ -2x-(m+2), & \text{dacă } x>2.\end{cases}$

11 Arată că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+1$, este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

12 Stabilește, prin calcul direct, paritatea fiecăreia dintre funcțiile:

a) $f(x)=x^4+1$;

b) $g(x)=x^3-x$;

c) $h(x)=x^2+x$;

d) $k(x)=|x|$;

e) $f(x)=|x-1|+|x+1|$;

f) $f(x)=\{x\}(1-\{x\})$.

Model de rezolvare a): $f(-x)=(-x)^4+1=x^4+1=f(x)$. Așadar f este pară.

Mărginire

13 Pentru fiecare funcție, decide dacă este mărginită superior, mărginită inferior sau mărginită. Justifică.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$;

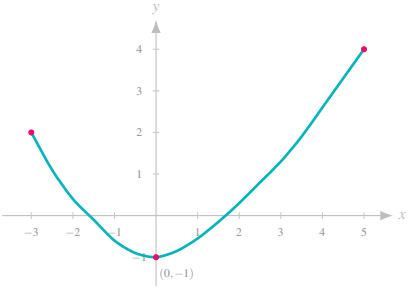
b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+3$;

c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=-x^2+4$;

d) $k:[-2,5]\to\mathbb{R}$, $k(x)=3x-1$.

Lecturi grafice complexe

14 Privește graficul de mai jos al funcției $f:[-3,5]\to\mathbb{R}$. (Funcția este convexă pe $[-3,5]$, atinge minimul în $x=0$.)



a) Pe ce interval f este crescătoare? Pe ce interval este descrescătoare?

b) Pe ce mulțime f ia valori pozitive? Pe ce mulțime ia valori negative?

c) Care este minimul lui f pe $[-3,5]$?

d) Câte rădăcini are f? Indică aproximativ aceste rădăcini.

15 Pentru fiecare funcție, reprezintă grafic funcția, determină intervalele de monotonie și, dacă există, valoarea minimă și valoarea maximă a funcției, precum și punctele în care sunt atinse. Poți folosi aplicația *Desmos* sau *GeoGebra*.

a) $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+|2x-1|$;

b) $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-1|+|x+1|$;

c) $f:[0,2]\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$;

d) $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$;

e) $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+1$.

16 ☆ **Portofoliu.** Arată că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$, este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ și impară.

Indicație pentru monotonie: pentru $x_1<x_2$, calculează $f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)$ și arată că ambii factori sunt pozitivi (primul evident; pentru al doilea, scrie $x_2^2+x_1x_2+x_1^2=\left(x_2+\frac{x_1}{2}\right)^2+\frac{3x_1^2}{4}$ și observă că x_1 și x_2 nu sunt ambele nule).

Lecția L3.5

Operații algebrice cu funcții. Compunerea funcțiilor

Amintește-ți!

Știi de mult timp să aduni, să scazi, să înmulțești și să împarți numere. Aceleași operații se pot face și cu *funcții*, atunci când au domenii compatibile. Aceste operații sunt utile, de exemplu, când vrei să combini două modele matematice (suma costurilor a două firme, raportul dintre două mărimi etc.).

1 Pentru funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ și $g(x) = 2x - 3$:

a) Calculează $f(2)$, $g(2)$, $f(2) + g(2)$, $f(2) \cdot g(2)$.

b) Calculează $f(0)$, $g(0)$, $f(0) - g(0)$.

Observă și descoperă!

Mihai cumpără online două produse: prețul primului produs este $f(n) = 30 + 5n$ lei (în funcție de cantitatea n, $n \in \mathbb{N}^*$); prețul al doilea $g(n) = 50 + 2n$ lei.

2 Cum exprimi prețul total $T(n)$ pentru cumpărarea cantității n din ambele produse?

3 Să presupunem acum că prețul al doilea este în euro și 1 euro = 5 lei. Cum exprimi prețul în lei al produsului al doilea, în funcție de prețul în euro?

4 Discută cu colegul: ce ar însemna să aplici unui număr *două funcții, una după alta*?

★ Important!

Operații algebrice cu funcții. Fie $f, g : A \to \mathbb{R}$.

- **Suma:** funcția $f + g : A \to \mathbb{R}$, definită prin $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- **Diferența:** funcția $f - g : A \to \mathbb{R}$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$.
- **Produsul:** funcția $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- **Raportul:** funcția $f/g : A' \to \mathbb{R}$, $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, definită doar pe $A' = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$.

Exemplu. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ și $g(x) = x + 1$.

$$(f + g)(x) = x^2 + x + 1;$$
$$(f \cdot g)(x) = x^2(x + 1) = x^3 + x^2;$$
$$(f/g)(x) = \frac{x^2}{x + 1}, \text{ definită pe } \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Compunerea funcțiilor. Fie $f : A \to B$ și $g : B \to C$. *Compusa lui g cu f* este funcția $g \circ f : A \to C$, definită prin

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{pentru orice } x \in A.$$

Atenție la ordine: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ înseamnă că întâi aplicăm f la x, apoi aplicăm g la rezultat.

Exemplu. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x+2$ și $g(x) = x^2$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+2) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4;$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 2.$$

Observă: $g \circ f \neq f \circ g$ în general! Compunerea *nu* este comutativă.

Identitatea ca element neutru. Pentru orice $f : A \to A$ avem $f \circ \mathrm{id}_A = f$ și $\mathrm{id}_A \circ f = f$, unde $\mathrm{id}_A : A \to A$, $\mathrm{id}_A(x) = x$.

Asociativitate. Pentru orice funcții $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, avem $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. (Justificare: pentru orice $x \in A$, ambii membri iau valoarea $h(g(f(x)))$, obținută aplicând lui x, pe rând, funcțiile f, g și h.)

Bine de știut!

Capcane frecvente.

- Pentru raportul f/g, exclude din domeniu valorile lui x pentru care $g(x) = 0$.
- Pentru compunerea $g \circ f$, codomeniul lui f trebuie să fie inclus în domeniul lui g. Dacă $f : A \to B$ și $g : C \to D$ cu $B \subseteq C$, atunci $g \circ f : A \to D$.
- $g \circ f \neq f \circ g$ în general! Verifică pe exemple concrete.

Exersează!

Operații cu funcții

5 Pentru $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$ și $g(x) = x + 5$, calculează:

a) $(f+g)(x)$;

b) $(f-g)(x)$;

c) $(f \cdot g)(x)$;

d) $(f/g)(x)$ și domeniul ei.

Model de rezolvare a): $(f+g)(x) = (3x-2) + (x+5) = 4x + 3$.

Model de rezolvare d): $(f/g)(x) = \dfrac{3x-2}{x+5}$, definită pe $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$.

6 Pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - 3$, calculează $(f+g)(2)$, $(f \cdot g)(2)$, $(f/g)(2)$.

Compunerea funcțiilor

7 Pentru $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ și $g(x) = x^2$, calculează:

a) $(g \circ f)(x)$;

b) $(f \circ g)(x)$;

c) $(f \circ f)(x)$;

d) $(g \circ g)(x)$.

Model de rezolvare a): $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$.

8 Pentru $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$ și $g(x) = 2x$, verifică prin calcul direct că $f \circ g \neq g \circ f$.

9 Pentru funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ și $g(x) = x - 2$:

a) Calculează $(f \circ g)(x)$ și scrie această funcție pe ramuri (fără modul).

b) Calculează $(g \circ f)(x)$ și scrie această funcție pe ramuri.

10 Considerăm funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x + |2x - 1|$.

a) Determină $\max \left\{ a \in \mathbb{Z} \,\middle|\, 0 \leq \dfrac{(f \circ f)(a)}{a-2} \leq 2 \right\}$.

b) Rezolvă ecuațiile: *i)* $(f \circ g)(x) = 3$; *ii)* $(g \circ f)(x) = 5$; *iii)* $f(x) + 2 \cdot g(x) = 5$.

c) Rezolvă inecuațiile: *i)* $(g \circ f)(x) \leq 5$; *ii)* $(f \circ g)(x) \leq 5$; *iii)* $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 1$.

11 Considerăm funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = \min\{-x + 2; 3x - 2\}$.

a) Determină $\max \left\{ a \in \mathbb{Z} \,\middle|\, 0 \leq \dfrac{(f \circ f)(-a)}{a+2} \leq 2 \right\}$.

b) Rezolvă ecuațiile: *i)* $(f \circ g)(x) = 3$; *ii)* $(g \circ f)(x) = 5$; *iii)* $2f(x) + g(x) = 5$.

c) Rezolvă inecuațiile: *i)* $(g \circ f)(x) \leq 5$; *ii)* $(f \circ g)(x) > 0$; *iii)* $\dfrac{g(x)}{f(x)} < 1$.

Aplicație practică (compunere)

12 Mihai folosește un convertor de unități: pentru a converti grade Celsius în grade Fahrenheit, se folosește formula $F(c) = \dfrac{9}{5}c + 32$. Pentru a converti euro în dolari, se folosește $D(e) = 1{,}1 \cdot e$.

a) Funcția $C(f) = \dfrac{5}{9}(f - 32)$ convertește Fahrenheit în Celsius. Calculează $(F \circ C)(50)$. Ce semnificație are?

b) Andrei câștigă E euro și vrea să-i convertească în dolari, apoi în lei. Dacă 1 dolar $= 4{,}5$ lei, funcția $L(d) = 4{,}5d$ convertește dolari în lei. Scrie $(L \circ D)(E)$, apoi calculează $(L \circ D)(100)$. Ce înseamnă?

Domeniul funcției compuse

13 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$, și $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Pentru ce valori ale lui x are sens $g(f(x))$? Calculează $(g \circ f)(x)$ pentru aceste valori.

Model de rezolvare: $g(f(x))$ are sens dacă $f(x) \in \mathbb{R}^*$, adică $x^2 - 4 \neq 0$, deci $x \neq \pm 2$. Considerăm restricția lui f la $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ (care ia valori în $\mathbb{R}^*$); compusa este $g \circ f : D \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

14 ☆ **Portofoliu.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$. Determină funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ (adică $(f \circ g)(x) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$). Verifică apoi că și $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. O funcție g cu ambele proprietăți se numește *inversa lui* f; o vei studia în lecția următoare.

Lecția L3.6

Funcții injective, surjective, bijective, inversabile

Amintește-ți!

La grădiniță, copiii primesc câte o jucărie fiecare. Trei situații posibile:

- *Cazul 1.* Doi copii primesc aceeași jucărie. (Este posibil?)
- *Cazul 2.* O jucărie rămâne pe raft, fără să fie aleasă.
- *Cazul 3.* Fiecare copil primește o jucărie diferită și toate jucăriile sunt alese.

1 Discută cu colegul: care caz este „perfect”? Cum am putea descrie matematic situațiile?

Observă și descoperă!

Fie funcțiile $f, g : \{1,2,3\} \to \{a,b,c\}$, definite prin $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$ și $g(1) = a$, $g(2) = a$, $g(3) = b$.

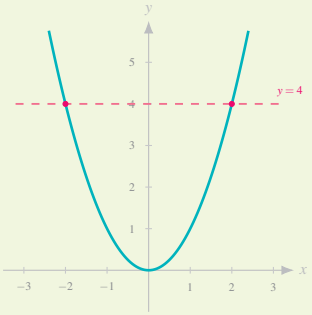
2 Discută cu colegul:

a) Pentru funcția f, există elemente diferite $x_1 \neq x_2$ care au aceeași imagine, adică $f(x_1) = f(x_2)$? Ce observi?

b) Pentru funcția g, există elemente diferite $x_1 \neq x_2$ care au aceeași imagine, adică $g(x_1) = g(x_2)$? Ce observi?

c) Pentru funcția f, toate elementele mulțimii $\{a,b,c\}$ apar ca valori ale funcției? Dar pentru g?

3 Privește graficul de mai jos al funcției $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$. Pe grafic este trasată punctat dreapta orizontală $y = 4$. Câte puncte de intersecție are aceasta cu graficul? Ce poți spune, de aici, despre ecuația $h(x) = 4$?



★ **Important!**

Definiție. Fie $f : A \to B$.

- f este *injectivă* dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$ cu $x_1 \neq x_2$ avem $f(x_1) \neq f(x_2)$. *Echivalent:* dacă $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $x_1 = x_2$.
- f este *surjectivă* dacă pentru orice $y \in B$ există $x \in A$ astfel încât $f(x) = y$. *Echivalent:* $\operatorname{Im} f = B$.
- f este *bijectivă* dacă este simultan injectivă și surjectivă.

Interpretarea geometrică (pentru funcții $f : A \to B$ cu $A, B \subseteq \mathbb{R}$).

- **Testul cu drepte orizontale pentru injectivitate:** f este injectivă dacă și numai dacă *orice* dreaptă orizontală $y = m$ taie graficul în *cel mult un* punct.
- **Testul cu drepte orizontale pentru surjectivitate:** f este surjectivă (pe B) dacă și numai dacă *orice* dreaptă orizontală $y = m$ cu $m \in B$ taie graficul în *cel puțin un* punct.
- **Testul cu drepte orizontale pentru bijectivitate:** f este bijectivă dacă și numai dacă orice dreaptă orizontală $y = m$ cu $m \in B$ taie graficul în *exact un* punct.

Funcții inversabile.

- $f : A \to B$ se numește *inversabilă* dacă există o funcție $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = \mathrm{id}_A$ și $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Această funcție g se notează f^{-1} și se numește *inversa lui* f.

Teoremă (condiție necesară și suficientă pentru inversabilitate). O funcție $f : A \to B$ este inversabilă *dacă și numai dacă* este bijectivă.

Demonstrația (idee). Dacă f este bijectivă, definim $f^{-1}(y) = x$, unde x este *singurul* element din A cu $f(x) = y$ (existența vine din surjectivitate, unicitatea din injectivitate). Reciproc, dacă f este inversabilă, se arată că $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ implică injectivitatea, iar $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ implică surjectivitatea.

Cum determini inversa unei funcții bijective? Pentru funcții cu lege analitică, rezolvi ecuația $y = f(x)$ în raport cu x, apoi schimbi rolurile lui x și y.
Exemplu: pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$:

- Bijectivitate. Funcția este injectivă: dacă două numere x_1 și x_2 au aceeași imagine, atunci ele sunt egale. Într-adevăr, dacă $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$, de unde $2x_1 = 2x_2$, deci $x_1 = x_2$. Funcția este surjectivă pe $\mathbb{R}$: pentru orice valoare $y \in \mathbb{R}$, există un număr $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y$. Din $2x + 3 = y$, obținem $x = \dfrac{y-3}{2}$, care este număr real. Prin urmare, funcția f este bijectivă.
- Calculăm inversa: $y = 2x + 3 \implies x = \dfrac{y-3}{2}$. Așadar $f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{2}$; notând, ca de obicei, variabila cu x, scriem $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$.
- Verificare: $(f \circ f^{-1})(x) = f\left(\dfrac{x-3}{2}\right) = 2 \cdot \dfrac{x-3}{2} + 3 = x - 3 + 3 = x$. ✓

Lectura grafică. Graficul lui f^{-1} este *simetricul* graficului lui f față de *prima bisectoare* $y = x$.

Aplicație digitală

Folosește **Desmos** pentru a vizualiza inversabilitatea.

- Reprezintă $f(x) = 2x + 3$ și dreapta $y = x$.
- Reprezintă inversa $f^{-1}(x) = (x-3)/2$. Verifică simetria față de $y = x$.
- Acum încearcă $f(x) = x^2$ pe $\mathbb{R}$. Trasează drepte orizontale $y = m$ pentru $m = 1, 4, 9$. Câte intersecții ai? Este f injectivă pe $\mathbb{R}$?
- Restricționează: $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$. Acum este bijectivă? Care este inversa? (Ar trebui să fie $\sqrt{x}$.)

Exersează!

Demonstrarea injectivității

4 Demonstrează că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 7$, este injectivă.

Model de rezolvare: Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $f(x_1) = f(x_2)$. Atunci $4x_1 - 7 = 4x_2 - 7 \iff 4x_1 = 4x_2 \iff x_1 = x_2$. Așadar f este injectivă. □

5 Demonstrează că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$, este injectivă. (Indicație: dacă $x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1$, atunci $x_1^3 = x_2^3$, deci $x_1 = x_2$, deoarece funcția cub este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.)

6 Arată că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, *nu* este injectivă. (Indicație: găsește un contraexemplu.)

Demonstrarea surjectivității

7 Demonstrează că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 5$, este surjectivă.

Model de rezolvare: Fie $y \in \mathbb{R}$. Căutăm $x \in \mathbb{R}$ cu $f(x) = y$, adică $3x + 5 = y \iff x = \dfrac{y-5}{3}$. Așadar pentru orice $y \in \mathbb{R}$ există $x = (y-5)/3 \in \mathbb{R}$ cu $f(x) = y$. Deci f este surjectivă. □

8 Pentru $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n + 5$, decide dacă f este injectivă. Dar surjectivă? Justifică.

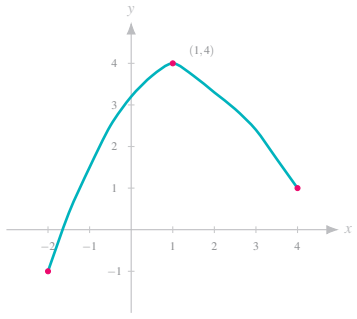
Lectura grafică a injectivității și surjectivității

9 Privește graficul de mai jos al funcției $f:[-2,4]\to\mathbb{R}$. Folosind testul cu drepte orizontale, decide:

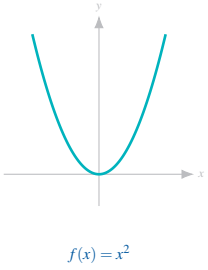
a) Este f injectivă?

b) Care este $\operatorname{Im} f$?

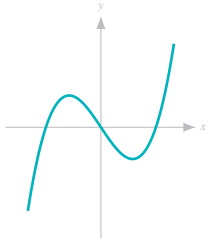
c) Este f surjectivă pe $\mathbb{R}$?



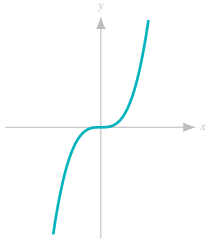
10 Privește graficele funcțiilor $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de mai jos. Pentru fiecare funcție, indică dacă este injectivă, dacă este surjectivă pe $\mathbb{R}$ și dacă este bijectivă.



$f(x)=x^2$



$g(x)=x^3-3x$



$h(x)=x^3$

11 Folosind aplicația *Desmos* sau *GeoGebra*, trasează graficul funcției f și stabilește dacă funcția este injectivă. Determină $\operatorname{Im} f$.

a) $f:[0,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x$;

b) $f:[0,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2-2x+3$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+3x+5$;

d) $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$;

e) $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

12 Pentru fiecare funcție f, demonstrează că f este injectivă.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+4$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+2$;

c) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$;

d) $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{dacă } x\le 1;\\ 3x+2, & \text{dacă } x>1;\end{cases}$

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-2x+4, & \text{dacă } x\le 1;\\ -x+3, & \text{dacă } x>1;\end{cases}$

g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x-1, & \text{dacă } x\le 1;\\ x^2+1, & \text{dacă } x>1.\end{cases}$

13 Pentru fiecare funcție f, determină valorile reale ale lui a știind că f este injectivă.

a) $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{dacă } x\le 1;\\ 3x+a, & \text{dacă } x>1;\end{cases}$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-2x+1, & \text{dacă } x\le 1;\\ -ax+3, & \text{dacă } x>1.\end{cases}$

14 Pentru fiecare funcție f, demonstrează că f este surjectivă.

a) $f:[1,+\infty)\to[-1,+\infty)$, $f(x)=2x-3$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-4x+5$;

c) $f:\mathbb{R}\to[1,+\infty)$, $f(x)=x^2+1$;

d) $f:(1,+\infty)\to(2,+\infty)$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{dacă } x\le 1;\\ 3x-4, & \text{dacă } x>1;\end{cases}$

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-2x-4, & \text{dacă } x\le 1;\\ -x+3, & \text{dacă } x>1;\end{cases}$

g) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=\begin{cases}x, & \text{dacă } x \text{ este par;}\\ \dfrac{x+3}{2}, & \text{dacă } x \text{ este impar.}\end{cases}$

Determinarea inversei

15 Pentru fiecare funcție f, demonstrează că f este bijectivă și determină inversa f^{-1}.

a) $f:[-1,2)\to[-6,9)$, $f(x)=5x-1$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+2$;

c) $f:[0,+\infty)\to[1,+\infty)$, $f(x)=x^2+1$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-4, & \text{dacă } x\in\mathbb{Q};\\ -x+3, & \text{dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q};\end{cases}$

e) $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+1}$.

16 Pentru fiecare funcție f, determină valorile reale ale parametrilor știind că f este bijectivă.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{dacă } x\le 1;\\ 3x+a, & \text{dacă } x>1;\end{cases}$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{dacă } x\le 1;\\ ax+b, & \text{dacă } x\in(1,2];\\ x^2+1, & \text{dacă } x>2.\end{cases}$

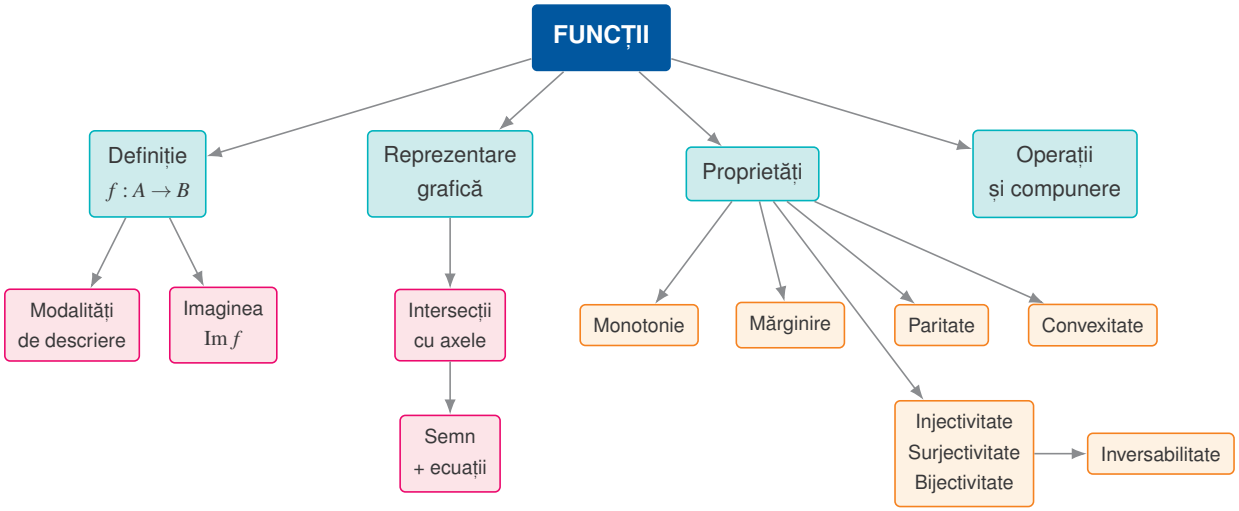
17 ☆ **Portofoliu.** Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+5$:

a) Este f injectivă pe $\mathbb{R}$? (Indicație: încearcă să găsești $x_1\neq x_2$ cu $f(x_1)=f(x_2)$. Folosește forma $f(x)=(x-2)^2+1$.)

b) Determină un interval $I\subseteq\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:I\to[1,+\infty)$, $f(x)=x^2-4x+5$, să fie bijectivă.

Recapitulare

Hartă conceptuală



De reținut!

La finalul acestei unități trebuie să poți:

- să recunoști o funcție descrisă în diferite moduri (prin formulă, tabel, grafic sau pe ramuri);
- să identifici domeniul, codomeniul și imaginea unei funcții;
- să lucrezi cu funcții uzuale (constantă, identică, afină, modul, parte întreagă, parte fracționară);
- să reprezinți grafic funcții, în special funcții afine și definite pe ramuri afine, și să determini intersecțiile graficului cu axele;
- să construiești tabelul de semn pentru o funcție afină și să îl interpretezi pe grafic;
- să interpretezi geometric soluțiile ecuațiilor $f(x) = m$ și $f(x) = g(x)$;
- să recunoști, prin lectură grafică, monotonia, mărginirea, paritatea, imparitatea, convexitatea și concavitatea unei funcții;
- să stabilești prin calcul algebric monotonia și paritatea unei funcții afine sau definite pe ramuri;
- să efectuezi operații algebrice cu funcții (sumă, diferență, produs, raport) și să determini compunerea a două funcții;
- să recunoști și să justifici injectivitatea și surjectivitatea unei funcții, folosind testele grafice cu drepte orizontale;
- să determini inversa unei funcții bijective, când funcția e dată prin formulă.

Sarcini de sinteză

Exersează!

1 Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-6$:

a) Reprezintă graficul (este o dreaptă — ai nevoie de două puncte).

b) Determină intersecțiile cu axele.

c) Construiește tabelul de semn.

d) Demonstrează că f este strict crescătoare.

e) Demonstrează că f este bijectivă și determină f^{-1}.

2 Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-2|$:

a) Scrie f pe ramuri (fără modul).

b) Reprezintă graficul.

c) Calculează $f(0), f(2), f(5)$ și determină $\operatorname{Im} f$.

d) Pe ce intervale este crescătoare? Pe ce intervale este descrescătoare?

e) Este f injectivă pe $\mathbb{R}$? Justifică.

3 Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+|2x-1|$.

a) Scrie funcția pe ramuri.

b) Reprezintă grafic funcția f.

c) Determină intersecțiile graficului cu axele de coordonate.

d) Determină $\operatorname{Im} f$.

e) Arată că funcția f este bijectivă și determină f^{-1}.

f) Calculează $\sum_{k=-2026}^{2026} f(k)$ și $\sum_{k=-2026}^{2026} f^{-1}(k)$.

4 Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+|3x-2|$.

a) Scrie funcția pe ramuri.

b) Reprezintă grafic funcția f.

c) Determină intersecțiile graficului cu axele de coordonate.

d) Arată că funcția f **nu** este nici injectivă, **nici** surjectivă.

e) Determină $\operatorname{Im} f$.

f) Calculează $\sum_{k=-2026}^{2026} f(k)$ și $\sum_{k=1}^{2026} f(2^k)$.

5 Stabilește paritatea fiecărei funcții $f, g, h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x^2-5$;

b) $g(x)=x^3+x$;

c) $h(x)=x^2+x+1$.

6 Pentru $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ și $g(x)=x-4$:

a) Calculează $(f+g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$.

b) Calculează $(f\circ g)(x)$ și $(g\circ f)(x)$.

c) Determină punctele de intersecție ale graficelor lui f și g.

7 Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$, $g(x)=|x+3|$.

a) Reprezintă grafic funcțiile f și g în același sistem de coordonate și determină punctele de intersecție ale graficelor.

b) Determină mulțimea $\left\{a\in\mathbb{R}\,\middle|\,0\le\dfrac{(f\circ f)(a)}{a-2}\le 2\right\}$.

c) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile: *i)* $\big|f(x)-3\big|=x+1$; *ii)* $f(x)+2\cdot g(x)=5$; *iii)* $(f\circ g)(x)=3$.

d) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuațiile: *i)* $(g\circ f)(x)\le 5$; *ii)* $\dfrac{g(x)}{f(x)}\ge 1$; *iii)* $\dfrac{f(x)}{(f\circ f)(x)}\le 5$.

e) Calculează sumele: *i)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{2026} f(3^k)$; *ii)* $\displaystyle\sum_{k=-2026}^{2026} g(k)$; *iii)* $\displaystyle\sum_{k=-2026}^{2026} g(2^k)$.

f) Demonstrează, folosind metoda inducției matematice, că $\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(x)=2^n x-3(2^n-1)$, pentru orice număr $n\in\mathbb{N}^*$.

8 ☆ **Portofoliu.** O firmă de telecomunicații oferă două abonamente:

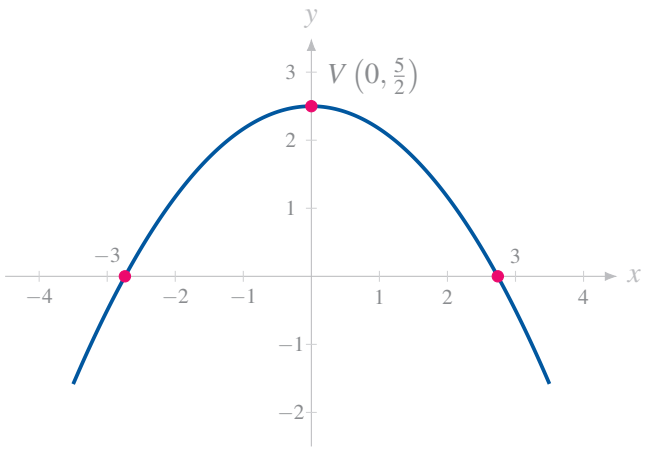
- **Plan A:** cost lunar $C_A(x)=30+0{,}1x$ lei (unde x este consumul în GB).
- **Plan B:** cost lunar $C_B(x)=50$ de lei (forfetar, indiferent de consum).

a) Reprezintă pe același reper graficele celor două funcții.

b) Pentru ce consum lunar planul A este mai ieftin decât planul B?

c) Cum interpretezi geometric punctul lor de intersecție?

9 (*Lectură grafică*) Graficul de mai jos reprezintă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Privește-l și răspunde:



a) Citește din grafic intervalul pe care funcția este crescătoare și pe cel pe care este descrescătoare.

b) Identifică valoarea maximă și punctul în care se atinge. Funcția este mărginită superior?

c) Stabilește (din grafic) paritatea funcției.

d) Câte soluții are ecuația $f(x)=1$?

e) Câte soluții are ecuația $f(x)=3$?

10 (*Funcție pe ramuri*) Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{dacă } x\le 0;\\ -x+1, & \text{dacă } x>0.\end{cases}$$

a) Reprezintă grafic funcția. Indică tipul fiecărei ramuri.

b) Calculează $f(-3), f(0), f(2)$.

c) Determină $\operatorname{Im} f$.

d) Pe ce intervale este f crescătoare? Pe ce intervale este descrescătoare?

11 (*Modelare*) O sticlă cilindrică conține inițial 200 ml de apă. Un robinet adaugă apă cu un debit constant de 50 ml/min, până când volumul de apă din sticlă ajunge la 1 200 ml.

a) Notează cu $V(t)$ volumul de apă (ml) la momentul t (min). Scrie formula lui V.

b) Care este domeniul de definiție al lui V?

c) Care este imaginea lui V?

d) Ce tip de funcție este V? Ce semnificație au panta și termenul liber în context?

12 (*Compunere*) Pentru $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ și $g(x)=x+3$:

a) Calculează $(f\circ g)(x)$ și $(g\circ f)(x)$.

b) Verifică pe un exemplu concret ($x=2$) că $f\circ g \neq g\circ f$.

c) Determină mulțimea soluțiilor ecuației $(f\circ g)(x)=0$.

d) Determină mulțimea soluțiilor ecuației $(g\circ f)(x)=7$.

13 Considerăm funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$, $g(x)=x^2+2x-3$.

a) Reprezintă grafic funcțiile f și g în același sistem de coordonate și determină punctele de intersecție ale graficelor.

b) Determină mulțimea $\left\{a\in\mathbb{R}\,\middle|\,0\leq\dfrac{(f\circ f)(a)}{a-2}\leq 2\right\}$.

c) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile: *i)* $\left|f(x)-3\right|=x+1$; *ii)* $f(x)+2\cdot g(x)=3$; *iii)* $(f\circ g)(x)=2$.

d) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuațiile: *i)* $(g\circ f)(x)\leq 5$; *ii)* $\dfrac{g(x)}{f(x)}\geq 1$; *iii)* $\dfrac{f(x)}{g(x)}\leq 0$.

e) Calculează sumele: *i)* $\sum\limits_{k=1}^{2026} f(3^k)$; *ii)* $\sum\limits_{k=1}^{2026} g(k)$; *iii)* $\sum\limits_{k=1}^{2026} g(2^k)$.

14 Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}-x+3, & \text{dacă } x\leq 1;\\ -x^2+x+2, & \text{dacă } x>1.\end{cases}$$

(Indicație: pentru $x>1$, $f(x)=\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$.)

a) Reprezintă grafic funcția f și determină punctele de intersecție ale graficului cu axele de coordonate.

b) Determină mulțimea $\left\{f(x)\,\middle|\,x\in[-3,3]\right\}$.

c) Determină mulțimea $\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|f(x)|\leq 4\right\}$.

d) Arată că funcția f este bijectivă și determină f^{-1}.

15 ☆ **Portofoliu — inversabilitate.** Fie $f:[0,+\infty)\to[3,+\infty)$, $f(x)=x^2+3$.

a) Demonstrează că f este strict crescătoare.

b) Demonstrează că f este injectivă (din monotonie).

c) Demonstrează că f este surjectivă pe $[3,+\infty)$.

d) Determină $f^{-1}:[3,+\infty)\to[0,+\infty)$.

Aplicație digitală: tabelul de variație

Aplicație digitală

Tabelul de variație sintetizează vizual toate proprietățile învățate: domeniu, intersecții cu axele, semn, monotonie, mărginire, valori extreme.

Exemplu rezolvat. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+2x+3$. Observăm că $f(x)=4-(x-1)^2=-(x+1)(x-3)$. Deci $f(x)\le 4=f(1)$, f se anulează în -1 și în 3, iar pentru $x_1<x_2$ avem $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)(2-x_1-x_2)$, pozitiv dacă $x_1,x_2\le 1$ și negativ dacă $x_1,x_2\ge 1$. Tabelul de variație:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
semn f		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
monotonie		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	
valori $f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\boxed{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Citire: f crescătoare pe $(-\infty,1]$, descrescătoare pe $[1,+\infty)$, maxim $f(1)=4$, pozitivă pe $(-1,3)$.

Cu Desmos / GeoGebra: introdu `f(x) = -x^2 + 2x + 3`. Dă clic pe vârf: apar coordonatele $(1,4)$. Dă clic pe punctele de pe axa Ox: apar -1 și 3. Compară aceste rezultate cu concluziile obținute algebric.

Exersează!

16 Construiește tabelul de variație pentru fiecare funcție și verifică folosind Desmos: *a)* $f(x)=2x-4$ (afină), *b)* $g(x)=|x-1|$ (modul), *c)* $h(x)=\begin{cases}x+2, & \text{dacă } x\le 0;\\ -2x+2, & \text{dacă } x>0\end{cases}$ (pe ramuri). *Indicație:* pentru funcțiile al căror grafic are un „colț”, marchează clar punctul în care se schimbă monotonia.

Evaluare — U3

45 de minute · 90 p + 10 p din oficiu

Subiectul I (25 de puncte)

1. **(10 p)** Pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-6$, intersecția graficului cu axa Ox este punctul:

☐ $(0,-6)$ ☐ $(3,0)$ ☐ $(-3,0)$ ☐ $(0,3)$

2. **(15 p)** Asociază fiecărei funcții din coloana A o proprietate din coloana B, astfel încât fiecare proprietate să fie folosită o singură dată.

A (funcția)	B (proprietate)
1) $f(x)=x^2$, $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	a) impară
2) $f(x)=x^3$, $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	b) constantă
3) $f(x)=5$, $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	c) pară
4) $f(x)=2x+3$, $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	d) bijectivă

Subiectul II (30 de puncte)

3. **(15 p)** Pentru $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+4$ și $g(x)=2x-1$:

a) $(f\circ g)(x)=$ _____

b) $(g\circ f)(x)=$ _____

c) Soluția ecuației $f(x)=g(x)$ este $x=$ _____

4. **(15 p)** Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+6$:

a) Rădăcina funcției: $x=$ _____

b) Completează: $f(x)>0$ pentru $x\in(-\infty,$ _____ $)$.

c) Funcția este *strict descrescătoare* pe $\mathbb{R}$? ☐ DA ☐ NU

Subiectul III (35 de puncte)

5. **(15 p)** Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+9$:

a) Reprezintă grafic.

b) Determină rădăcina și fă tabelul de semn.

c) Demonstrează că f este strict descrescătoare.

d) Demonstrează că f este bijectivă și determină inversa.

6. **(20 p)** Două firme de transport oferă tarife pentru o cursă cu mașina:

- **Firma A:** taxă fixă de pornire 8 lei + 2 lei/km parcurs.
- **Firma B:** taxă fixă de pornire 4 lei + 3 lei/km parcurs.

a) Notează cu $C_A(x)$ și $C_B(x)$ costurile în funcție de distanța x (în km). Scrie formulele.

b) Reprezintă pe același reper graficele.

c) Determină distanța x_0 pentru care costul cursei este același la ambele firme.

d) Pentru ce distanțe firma A este mai ieftină decât firma B?

e) Pentru o cursă de 7 km, ce firmă este mai avantajoasă? Justifică prin calcul.

Notă: 10 puncte se acordă din oficiu. Total: 100 de puncte. Timp de lucru: 45 de minute.

Exersezi, corectezi, progresezi

Pentru fiecare dintre cele două probleme de la subiectul III, ai aici sarcini pe trei niveluri: **Ameliorare**, **Echivalent** și **Dezvoltare**. În funcție de rezultatul obținut la test, începe cu nivelul potrivit și continuă cu următoarele.

Pentru subiectul III, itemul 5 (funcție afină)

Ameliorare

Pas cu pas, refă rezolvarea.

1. Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+4$, găsește $f(0)$ și numărul x_0 pentru care $f(x_0)=0$. Notează cele două puncte $(0,f(0))$ și $(x_0,0)$. Reprezintă-le pe un reper și unește-le.
2. Care este coeficientul lui x în $f(x)=-2x+4$? Ținând seama de semnul acestui coeficient, completează tabelul de semn:

x	$-\infty$		?		$+\infty$
$f(x)$		?	0	?	

3. Pentru $x_1<x_2$, calculează $f(x_2)-f(x_1)$. Care este semnul? Ce concluzie tragi despre monotonie?

Echivalent

Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-12$:

a) Reprezintă graficul (este o dreaptă).

b) Determină rădăcina și fă tabelul de semn.

c) Demonstrează că f este strict crescătoare (folosind raportul de variație).

d) Demonstrează că f este bijectivă și determină inversa.

Dezvoltare

Funcție pe ramuri. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{dacă } x\le 1;\\ -x+4, & \text{dacă } x>1.\end{cases}$$

a) Reprezintă graficul. (Atenție: verifică dacă cele două ramuri ale graficului se unesc în punctul de abscisă $x=1$.)

b) Determină intersecțiile cu axele.

c) Pe ce intervale f este crescătoare? Pe ce intervale este descrescătoare?

d) Care este $\mathrm{Im}\, f$?

e) Este f injectivă? Justifică prin lectură grafică (testul cu drepte orizontale) și apoi algebric.

Pentru subiectul III, itemul 6 (modelare cu funcții)

Ameliorare

Recunoaște modelul, tradu-l matematic, calculează și compară.

1. Mihai cumpără bile colorate la un magazin. Plătește o taxă fixă de 5 lei pentru pungă, plus 2 lei pentru fiecare bilă. Notează cu $C(n)$ costul total pentru n bile.

   a) Calculează $C(0), C(1), C(5), C(10)$.

   b) Care este formula lui C?

   c) Ce înseamnă, în context, $C(0) = 5$?

2. Maria face același lucru, dar la altă firmă: nu plătește taxă fixă, dar fiecare bilă costă 3 lei.

   a) Scrie formula pentru costul total $D(n)$.

   b) Compară $C(5)$ cu $D(5)$. Ce observi?

   c) Compară $C(10)$ cu $D(10)$.

Echivalent

Două firme oferă servicii de copiere:

- **Firma A:** taxă fixă 10 lei + 0,3 lei/copie.
- **Firma B:** fără taxă fixă, 0,5 lei/copie.

Notează cu $C_A(x)$ și $C_B(x)$ costurile pentru x copii.

a) Scrie formulele C_A și C_B.

b) Determină valoarea lui x pentru care costul este același la ambele firme.

c) Pentru ce numere de copii firma A este mai ieftină?

d) Reprezintă grafic ambele funcții pe același reper.

Dezvoltare

Comparație între trei firme. Trei firme oferă pachete de internet pentru 30 de zile:

- **Firma A:** taxă fixă de 50 de lei pentru 50 GB; fiecare GB suplimentar costă 1 leu.
- **Firma B:** taxă fixă de 80 de lei pentru 200 GB; fiecare GB suplimentar costă 2 lei.
- **Firma C:** 2 lei/GB, fără taxă fixă.

a) Pentru fiecare firmă, scrie funcția cost $C(x)$ pentru un consum de x GB. (Atenție la firmele A și B: trebuie să gândești pe ramuri!)

b) Pentru un consum de 30 GB, care firmă este cea mai ieftină?

c) Pentru un consum de 100 GB?

d) Pentru un consum de 250 GB?

e) Construiește un tabel sau un grafic care să te ajute să răspunzi: pentru ce intervale ale consumului care firmă este cea mai bună?

Autoevaluare

Bifează enunțurile care descriu ce poți face singur, fără ajutor:

- ☐ Pot recunoaște o funcție descrisă în diferite moduri (prin formulă, tabel, grafic sau pe ramuri).
- ☐ Pot identifica domeniul, codomeniul și imaginea unei funcții.
- ☐ Cunosc definițiile funcțiilor uzuale: constantă, identică, afină, modul, parte întreagă, parte fracționară.
- ☐ Pot reprezenta grafic o funcție afină și o funcție definită pe ramuri.
- ☐ Pot determina intersecțiile graficului unei funcții cu axele Ox și Oy.
- ☐ Pot construi tabelul de semn pentru o funcție afină.
- ☐ Pot interpreta geometric soluțiile ecuațiilor $f(x) = m$ și $f(x) = g(x)$.
- ☐ Recunosc prin lectură grafică monotonia, mărginirea, paritatea și convexitatea unei funcții.
- ☐ Pot demonstra prin calcul algebric monotonia unei funcții afine.
- ☐ Pot demonstra prin calcul direct paritatea sau imparitatea unei funcții.
- ☐ Pot face operații algebrice cu funcții (sumă, diferență, produs, raport).
- ☐ Pot calcula compunerea $g \circ f$ și știu că, în general, $g \circ f \neq f \circ g$.
- ☐ Pot demonstra injectivitatea și surjectivitatea unei funcții afine.
- ☐ Pot determina inversa unei funcții bijective date prin formulă.

Cum interpretezi rezultatul?

- Dacă ai bifat **12–14 enunțuri**: stăpânești conținutul unității. Treci cu încredere la U4 și încearcă sarcinile cu ☆ din lecțiile parcurse.
- Dacă ai bifat **8–11 enunțuri**: ești pe drumul cel bun. Reia sarcinile de tip „Echivalent” din secțiunea „Exersezi, corectezi, progresezi” înainte de a începe U4.
- Dacă ai bifat **0–7 enunțuri**: solicită sprijinul profesorului. Reia sarcinile de tip „Ameliorare” din secțiunea „Exersezi, corectezi, progresezi” împreună cu un coleg cu care lucrezi bine.

Reflectează:

- Care a fost cea mai utilă imagine din această unitate (graficul, tabelul de semn, testele cu drepte orizontale/verticale)? De ce?
- Ce situație din viața reală ți-a venit cel mai natural în minte când ai învățat despre funcții?
- Cum vezi legătura dintre formal („demonstrez că f este crescătoare”) și grafic („graficul urcă”)?

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE

U4

Funcția de gradul al doilea

> *Un proiectil care se mișcă uniform pe orizontală și, în același timp, cade accelerat pe verticală descrie o semiparabolă.*
>
> *— după Galileo Galilei,* Discorsi *(1638)*

Lecțiile unității

- L4.1 — Funcția de gradul al doilea: definiție, grafic. Formula de rezolvare a ecuației de gradul al doilea
- L4.2 — Monotonia funcției de gradul al doilea. Punctul de extrem
- L4.3 — Semnul funcției. Inecuații de gradul al doilea
- L4.4 — Relațiile lui Viète
- L4.5 — Sisteme care conțin ecuații de gradul al doilea
- Recapitulare · Evaluare · Exersezi, corectezi, progresezi · Autoevaluare

Ce vei învăța

- să recunoști și să reprezinți grafic funcția de gradul al doilea;
- să citești din grafic monotonia, semnul și punctul de extrem;
- să rezolvi ecuații și inecuații de gradul al doilea;
- să folosești relațiile lui Viète;
- să rezolvi sisteme care conțin ecuații de gradul al doilea;
- să modelezi situații practice cu ajutorul funcției de gradul al doilea.



Lecția L4.1

Funcția de gradul al doilea: definiție, grafic. Formula de rezolvare a ecuației de gradul al doilea

Amintește-ți!

În gimnaziu ai învățat să calculezi pătratul unui număr și ai rezolvat ecuații simple de tipul $x^2 = 9$. Ai văzut, de asemenea, că aria unui pătrat de latură x este $A = x^2$, iar volumul unui cub este $V = x^3$.
În U3 ai întâlnit deja funcția $f(x) = x^2$, al cărei grafic este parabola $y = x^2$, ca exemplu de funcție pară și convexă, cu minimul atins în $x = 0$.

1. Calculează rapid:
   a) $5^2 - 3 \cdot 5 + 2 = ?$
   b) $(-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 2 = ?$
   c) $1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = ?$
2. Discută cu colegul: pentru ce alte valori ale lui x ai obține $x^2 - 3x + 2 = 0$?

Observă și descoperă!

Andrei aruncă o minge de baschet către coș. Înălțimea (în metri) la momentul t (în secunde) este aproximată de:

$$h(t) = -5t^2 + 6t + 1{,}9, \quad t \in [0; 1{,}4].$$

3. Completează tabelul de valori:

t (s)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
$h(t)$ (m)	1,9						

4. Reprezintă punctele într-un reper cartezian. Ce formă are graficul? Cu ce curbă studiată în U3 seamănă?
5. În ce moment, aproximativ, atinge mingea înălțimea maximă? Ce valoare are aceasta?
6. Discută cu colegul: dacă mingea ar fi aruncată cu altă viteză (de exemplu, $h(t) = -5t^2 + 8t + 1{,}9$), ce s-ar schimba la grafic?

★ **Important!**

Definiție. Numim *funcție de gradul al doilea* (sau *funcție pătratică*) o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de forma

$$\boxed{f(x)=ax^2+bx+c,\quad a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0.}$$

Numerele reale a,b,c se numesc *coeficienții* funcției (a este coeficientul dominant, iar c este termenul liber). Atenție: condiția $a\neq 0$ este esențială (altfel funcția ar fi afină, nu de gradul al doilea).

Forma canonică. Pornind de la ax^2+bx+c și completând pătratul:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c = a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}\\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Notăm $\Delta=b^2-4ac$ (*discriminantul*). Atunci forma canonică este:

$$\boxed{f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}.}$$

Reprezentarea grafică a unei funcții de gradul al doilea este o curbă numită *parabolă*. Caracteristicile sale principale, citite din forma canonică:

- **Vârful parabolei** este punctul $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- **Axa de simetrie** este dreapta verticală $x=-\frac{b}{2a}$.
- Dacă $a>0$, parabola este *deschisă în sus*, iar vârful este *punct de minim*.
- Dacă $a<0$, parabola este *deschisă în jos*, iar vârful este *punct de maxim*.

★ **Important!**

Deducerea formulei de rezolvare a ecuației $ax^2+bx+c=0$**.**
Pornim de la forma canonică:

$$ax^2+bx+c=0 \iff a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a} \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}.$$

Discuție după Δ:

- Dacă $\Delta<0$: ecuația *nu are soluții reale* (un pătrat real nu poate fi negativ).

- Dacă $\Delta = 0$: $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$, deci o singură soluție (numită *rădăcină dublă*):

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

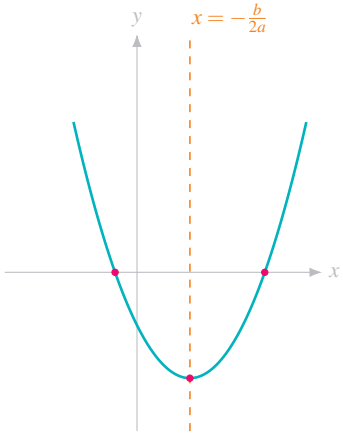
- Dacă $\Delta > 0$: $x + \dfrac{b}{2a} = \pm\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} = \pm\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ (deoarece semnul $\pm$ cuprinde ambele variante, $|a|$ poate fi înlocuit cu a), deci două soluții reale distincte:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.}$$

Intersecția graficului cu axa Ox.

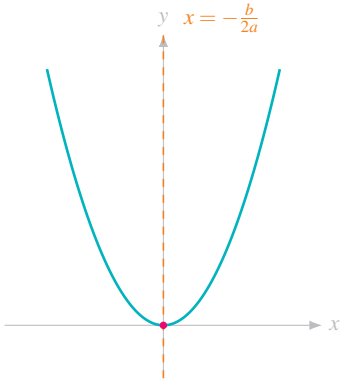
- Dacă $\Delta > 0$: parabola taie axa Ox în două puncte $(x_1, 0)$ și $(x_2, 0)$.
- Dacă $\Delta = 0$: parabola este *tangentă* axei Ox în punctul $(-b/(2a), 0)$.
- Dacă $\Delta < 0$: parabola *nu intersectează* axa Ox.

Intersecția graficului cu axa Oy. Graficul intersectează întotdeauna axa Oy în punctul $(0, c)$, deoarece $f(0) = c$.



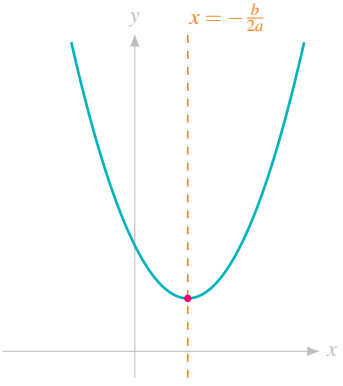
$\Delta > 0$, $a > 0$

2 rădăcini reale



$\Delta = 0$, $a > 0$

rădăcină dublă



$\Delta < 0$, $a > 0$

fără rădăcini reale

Bine de știut!

Cum citesc rapid o parabolă $f(x)=ax^2+bx+c$?

- Semnul lui a: *cupă* (în sus) dacă $a>0$, *boltă* (în jos) dacă $a<0$.
- Vârful: $V=\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
- Taie axa Oy în $(0,c)$.
- Intersectează axa Ox doar dacă $\Delta\geq 0$, în punctele ale căror abscise sunt soluțiile ecuației $f(x)=0$ (pentru $\Delta=0$, parabola este tangentă axei Ox).

Aplicație digitală

Folosește **Desmos** (`www.desmos.com`) sau **GeoGebra** pentru a explora parabola interactiv.

- Scrie: $f(x)=ax^2+bx+c$, definește a,b,c ca glisoare.
- Modifică a: cum se schimbă parabola? Ce se întâmplă când $a>0$, respectiv când $a<0$? Dar când $|a|$ este mare, respectiv mic?
- Modifică c: ce se modifică pe grafic? Doar punctul de intersecție cu Oy?
- Modifică b păstrând a,c constante: cum se mută vârful?

Exersează!

Identifică elementele unei funcții de gradul al doilea

7 Pentru fiecare funcție, precizează coeficienții a,b,c, calculează discriminantul Δ și determină rădăcinile (dacă există):

a) $f(x)=x^2-5x+6$;

b) $f(x)=2x^2-4x+2$;

c) $f(x)=x^2+x+1$;

d) $f(x)=-x^2+3x-2$.

Model de rezolvare a): $a=1, b=-5, c=6$. $\Delta=25-24=1>0$. $x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{2}$, deci $x_1=2$, $x_2=3$.

Reprezentare grafică

8 Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$:

a) Determină rădăcinile (intersecția cu Ox).

b) Determină intersecția cu Oy.

c) Determină vârful parabolei și axa de simetrie.

d) Reprezintă graficul.

9 Determină, după caz, punctul de minim sau punctul de maxim al fiecărei funcții:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$;

b) $g(x) = -x^2 + 4x + 1$;

c) $h(x) = 2x^2 + 8x + 7$;

d) $p(x) = -3x^2 + 6x - 2$.

10 Pentru fiecare funcție de mai jos, determină rădăcinile și punctele de intersecție ale graficului cu axele de coordonate:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$;

b) $g(x) = x^2 - 4x + 5$;

c) $h(x) = -x^2 + 5x - 6$;

d) $p(x) = 2x^2 - x - 1$.

11 Se consideră funcția

$$f(x) = x^2 - 2x - 3.$$

a) Scrie funcția în formă canonică.

b) Determină vârful parabolei.

c) Precizează axa de simetrie.

d) Stabilește valoarea minimă sau maximă a funcției.

12 Se consideră funcția

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5.$$

a) Determină coordonatele vârfului parabolei.

b) Precizează dacă parabola este deschisă în sus sau în jos.

c) Determină intersecțiile graficului cu axa Ox.

d) Determină intersecția graficului cu axa Oy.

13 Determină valorile reale ale parametrului m pentru care funcția

$$f(x) = x^2 - 2mx + m + 3$$

are două rădăcini reale distincte.

14 Determină valorile reale ale parametrului m pentru care funcția

$$f(x) = x^2 - (m+1)x + 4$$

are o singură rădăcină reală.

15 Fie funcțiile

$$f(x) = mx^2 - 5x + 2$$

și

$$g(x) = x^2 - mx + 2,$$

unde $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$.

Determină valorile lui m pentru care funcțiile f și g au o rădăcină comună.

16 Se consideră funcția

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

a) Determină rădăcinile funcției.

b) Scrie funcția sub forma $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

c) Stabilește semnul funcției pe intervalele determinate de rădăcinile sale.

17 Se consideră funcția

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 6.$$

a) Determină vârful parabolei.

b) Determină valoarea maximă a funcției.

c) Determină mulțimea valorilor funcției.

d) Stabilește pentru ce valori ale lui x avem $f(x) \geq 0$.

18 Pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 6x + 7$, parcurge aceeași analiză ca la sarcina 17.

Modelare practică

19 O minge este aruncată în sus, iar înălțimea (în metri) la momentul t (în secunde) este $h(t) = -5t^2 + 20t$.

a) Care este înălțimea inițială $h(0)$?

b) După cât timp mingea atinge înălțimea maximă? Care este aceasta?

c) După cât timp mingea revine la sol ($h = 0$)?

20 O fermă vrea să închidă un teren dreptunghiular cu un gard de 100 m. Notează cu x lățimea (în m). Care este aria $A(x)$ a terenului în funcție de x? Pentru ce valoare a lui x aria este maximă?

Indicație: Perimetrul terenului este $2x + 2L = 100$, unde L este lungimea terenului, deci $L = (100 - 2x)/2 = 50 - x$. Aria: $A(x) = x \cdot (50 - x) = -x^2 + 50x$.

21 ☆ **Portofoliu.** Determină valorile parametrului real m astfel încât ecuația $x^2 - 2mx + (m^2 - 1) = 0$ să aibă soluții reale.

Lecția L4.2

Monotonia funcției de gradul al doilea. Punctul de extrem

Amintește-ți!

În U3 ai învățat că o funcție f este *strict crescătoare* pe un interval I dacă, pentru orice $x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) < f(x_2)$. Pe grafic, acest lucru se vede ca o curbă care *urcă*.

1. Privește parabola $y = x^2$, graficul funcției $f(x) = x^2$ (figura din mijloc de la pagina 119, cazul $\Delta = 0$, $a > 0$). Pe ce interval este funcția *descrescătoare*? Pe ce interval este *crescătoare*?
2. Discută cu colegul: dacă o parabolă are vârful în punctul $V(x_V, y_V)$, ce se întâmplă la stânga lui x_V? Ce se întâmplă la dreapta lui x_V?

Observă și descoperă!

3. Reprezintă pe același reper graficele celor două funcții:
   - $f_1(x) = x^2$ (parabolă deschisă în sus, $a = 1 > 0$);
   - $f_2(x) = -x^2$ (parabolă deschisă în jos, $a = -1 < 0$).
4. Pentru fiecare funcție, completează tabelul:

Întrebare	$f_1(x) = x^2$	$f_2(x) = -x^2$
Care sunt coordonatele vârfului?		
Pe ce interval crește?		
Pe ce interval scade?		
Vârful corespunde minimului sau maximului?		

5. Discută cu colegul: există o regulă generală care leagă semnul lui a de tipul vârfului (minim sau maxim)?

★ Important!

Teoremă (monotonia funcției de gradul al doilea). Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a \neq 0$, și fie $x_V = -\dfrac{b}{2a}$ abscisa vârfului.

Cazul $a > 0$ (parabolă deschisă în sus):

- f este *strict descrescătoare* pe $(-\infty, x_V]$;
- f este *strict crescătoare* pe $[x_V, +\infty)$;
- f are *minim* în x_V, cu valoarea $f(x_V) = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Cazul $a < 0$ (parabolă deschisă în jos):

- f este *strict crescătoare* pe $(-\infty, x_V]$;
- f este *strict descrescătoare* pe $[x_V, +\infty)$;
- f are *maxim* în x_V, cu valoarea $f(x_V) = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Demonstrație (cazul $a > 0$, monotonia pe $[x_V, +\infty)$). Folosim forma canonică:

$$f(x) = a(x - x_V)^2 + f(x_V).$$

Fie $x_V \leq x_1 < x_2$. Atunci $0 \leq x_1 - x_V < x_2 - x_V$, deci, ridicând la pătrat (operație care păstrează ordinea pe numere ≥ 0):

$$(x_1 - x_V)^2 < (x_2 - x_V)^2.$$

Înmulțim cu $a > 0$ și adunăm $f(x_V)$:

$$a(x_1 - x_V)^2 + f(x_V) < a(x_2 - x_V)^2 + f(x_V) \iff f(x_1) < f(x_2).$$

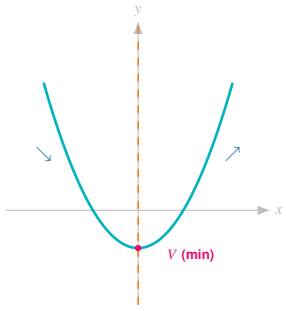
Așadar f este strict crescătoare pe $[x_V, +\infty)$. Demonstrația pentru $(-\infty, x_V]$ este analogă (folosind faptul că, pentru numere mai mici sau egale cu 0, ridicarea la pătrat *inversează* ordinea). □

Tabel de variație. Comportarea unei funcții de gradul al doilea se sintetizează în tabelul:
Cazul $a > 0$:

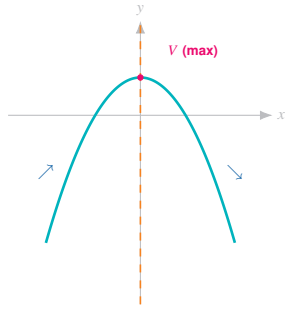
x	$-\infty$		x_V		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$ (min)	$\nearrow$	$+\infty$

Cazul $a < 0$:

x	$-\infty$		x_V		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$ (max)	$\searrow$	$-\infty$



$a > 0$ (min)



$a < 0$ (max)

Bine de știut!

Care este vârful? Coordonatele vârfului $V(x_V, y_V)$:

$$x_V = -\frac{b}{2a}, \quad y_V = f(x_V) = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Atenție: în loc să calculezi y_V prin formula cu Δ, e mai simplu să substitui direct x_V în $f(x)$.

Exersează!

Identifică monotonia și punctul de extrem

6 Pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 5$:

a) Precizează valoarea lui a. Vârful este punct de minim sau maxim?

b) Calculează coordonatele vârfului.

c) Construiește tabelul de variație.

Model de rezolvare: $a = 1 > 0 \Rightarrow$ minim. $x_V = -(-6)/2 = 3$. $y_V = f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$. Tabelul de variație:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4 (min)	$\nearrow$	$+\infty$

7 Pentru fiecare funcție, determină vârful și fă tabelul de variație:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$;

b) $g(x) = -x^2 + 6x - 5$;

c) $h(x) = 2x^2 - 8x + 7$.

Justifică prin calcul algebric

8 Demonstrează prin calcul algebric (studiind semnul diferenței $f(x_2) - f(x_1)$) că $f(x) = x^2 + 4x + 1$ este strict crescătoare pe $[-2, +\infty)$.

Indicație: Pentru $x_1, x_2 \in [-2, +\infty)$ cu $x_1 < x_2$, calculează $f(x_2) - f(x_1) = (x_2^2 + 4x_2) - (x_1^2 + 4x_1) = (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 + 4)$. Cum $x_1 \geq -2$ și $x_2 \geq -2$ cu $x_2 > x_1$, avem $x_1 + x_2 + 4 > -4 + 4 = 0$. Așadar $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Monotonie și punct de extrem

9 Determină intervalele de monotonie și punctul de minim sau de maxim al fiecărei funcții:

a) $f(x) = x^2 - x + 1$;

b) $g(x) = x^2 + 5x + 7$;

c) $h(x) = -x^2 + 4x - 1$;

d) $p(x) = -2x^2 - 8x + 3$.

10 Pentru fiecare funcție de mai jos, determină abscisa vârfului parabolei, intervalele de monotonie și valoarea minimă sau maximă:

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$;

b) $g(x) = 3x^2 + 6x - 1$;

c) $h(x) = -x^2 - 2x + 6$;

d) $p(x) = -3x^2 + 12x - 5$.

11 Se consideră funcția

$$f(x) = x^2 - 6x + 4.$$

a) Scrie funcția în formă canonică.

b) Determină vârful parabolei.

c) Stabilește intervalele de monotonie.

d) Determină valoarea minimă a funcției.

12 Se consideră funcția

$$f(x) = -x^2 + 8x - 10.$$

a) Determină coordonatele vârfului parabolei.

b) Precizează dacă funcția are punct de minim sau punct de maxim.

c) Determină intervalele de monotonie.

d) Determină valoarea maximă a funcției.

13 Întocmește tabelul de variație al fiecăreia dintre funcțiile:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$;

b) $g(x) = -x^2 + 6x + 2$;

c) $h(x) = 2x^2 - 8x + 1$;

d) $p(x) = -4x^2 - 8x + 5$.

14 Determină valorile reale ale parametrului m pentru care funcția

$$f(x) = mx^2 - 4mx + 1$$

este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 2]$ și strict crescătoare pe intervalul $[2, +\infty)$.

15 Determină valorile reale ale parametrului m pentru care funcția

$$f(x) = mx^2 + 2mx - 5$$

este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, -1]$ și strict descrescătoare pe intervalul $[-1, +\infty)$.

16 Se consideră funcțiile

$$f(x) = mx^2 - 2x + 5m + 2$$

și

$$g(x) = x^2 - 2mx - 3,$$

unde $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$.
Determină valorile lui m pentru care cele două funcții au aceeași abscisă a vârfului.

17 Se consideră funcțiile

$$f(x) = x^2 + 5x + 2$$

și

$$g(x) = x^2 - 7x + 2.$$

a) Determină punctul de minim al funcției f.

b) Determină punctul de minim al funcției g.

c) Determină punctul de minim al funcției $f + g$.

d) Compară abscisa vârfului graficului funcției $f + g$ cu abscisele vârfurilor graficelor funcțiilor f și g.

18 Se consideră funcția

$$f(x) = x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 3.$$

a) Determină, în funcție de m, abscisa vârfului parabolei.

b) Determină valoarea minimă a funcției.

c) Determină valorile lui m pentru care funcția are minimul în punctul de abscisă 3.

d) Pentru valoarea lui m găsită, stabilește intervalele de monotonie ale funcției.

Aplicații practice (optimizare)

19 Un fermier are 80 m de gard cu care vrea să închidă o suprafață dreptunghiulară pentru animale (cele 4 laturi).

a) Notează cu x lățimea dreptunghiului (în m). Exprimă lungimea în funcție de x.

b) Exprimă aria $A(x)$ în funcție de x.

c) Pentru ce valoare a lui x aria este maximă? Care este aria maximă?

20 O firmă vinde tricouri imprimate. Profitul P (în lei) în funcție de prețul de vânzare p este modelat de

$$P(p) = -2p^2 + 200p - 3000.$$

a) La ce preț profitul este maxim?

b) Care este profitul maxim?

c) La ce prețuri firma nu mai are profit (adică $P(p) \leq 0$)?

21 ☆ **Portofoliu.** Determină valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât minimul funcției $f(x) = x^2 + 2mx + (m^2 - 4m + 5)$ să fie egal cu 1.

Lecția L4.3

Semnul funcției. Inecuații de gradul al doilea

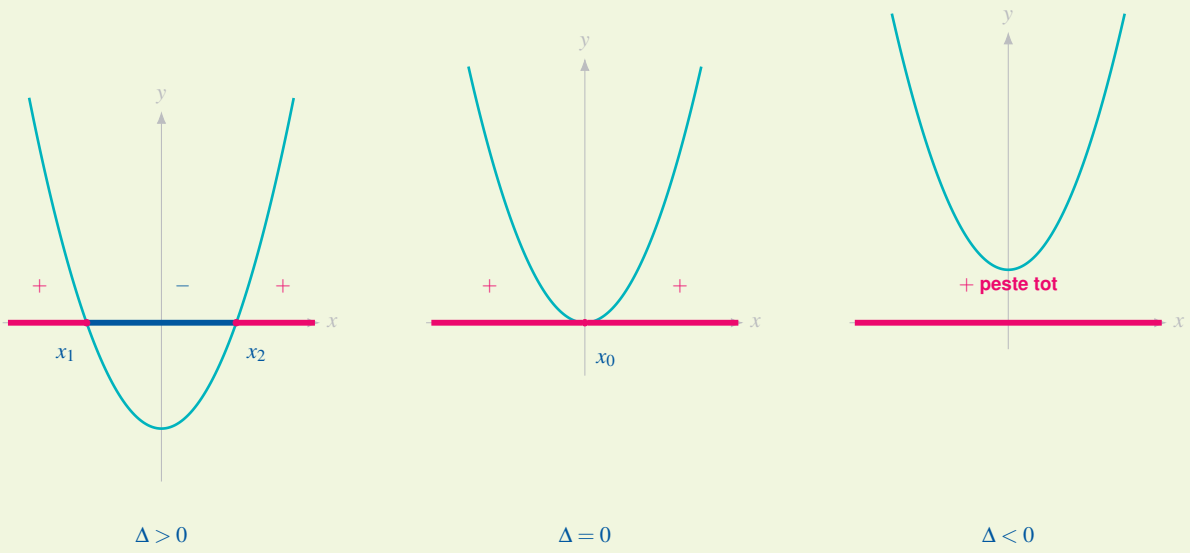
Amintește-ți!

La funcțiile afine ai învățat să faci tabelul de semn. Regula era simplă: $f(x)=ax+b$ are semn contrar lui a înainte de rădăcină și semnul lui a după rădăcină.

1. Fă tabelul de semn pentru $f(x)=2x-6$ și pentru $g(x)=-x+4$.
2. Acum gândește vizual: pentru o parabolă, pe ce porțiuni este graficul *deasupra* axei Ox (deci $f(x)>0$)? Pe ce porțiuni este *sub* axa Ox (deci $f(x)<0$)?

Observă și descoperă!

Privește graficele celor trei parabole de mai jos, toate cu $a>0$:



3. Pentru fiecare parabolă, indică unde graficul este deasupra axei Ox și unde este sub axa Ox. Folosește notații cu intervale.
4. Discută cu colegul: ce s-ar schimba în răspunsurile tale de la sarcina 3 dacă $a<0$? Cum afectează semnul lui a „direcția” parabolei?

★ **Important!**

Teoremă (semnul funcției de gradul al doilea). Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, cu $a\neq 0$, și fie $\Delta=b^2-4ac$.

Cazul $\Delta>0$ (două rădăcini distincte $x_1<x_2$):
f are *semn contrar lui a* pe intervalul (x_1,x_2) și *semnul lui a* pe $(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$. În rădăcini valoarea este 0.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a	

Pe scurt: în afara rădăcinilor, f are semnul lui a; între rădăcini, f are semn contrar lui a (regula este aceeași și pentru $a>0$, și pentru $a<0$).

Cazul $\Delta=0$ (o rădăcină dublă $x_0=-b/(2a)$):
f are *semnul lui a* pe $\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ și se anulează în x_0.

Cazul $\Delta<0$ (fără rădăcini reale):
f are *semnul lui a* pe întreaga axă $\mathbb{R}$ (parabola nu atinge Ox).

Demonstrație (cazul $\Delta>0$). Din forma canonică (diferență de pătrate) obținem:

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Studiem semnul produsului $(x-x_1)(x-x_2)$, cu $x_1<x_2$:

- dacă $x<x_1$: $x-x_1<0$ și $x-x_2<0$, deci produsul $>0\Rightarrow f(x)$ are semnul lui a;
- dacă $x_1<x<x_2$: $x-x_1>0$, $x-x_2<0$, deci produsul $<0\Rightarrow f(x)$ are semn contrar lui a;
- dacă $x>x_2$: ambii factori >0, deci produsul $>0\Rightarrow f(x)$ are semnul lui a.

□

★ **Important!**

Inecuații de gradul al doilea. O *inecuație de gradul al doilea* are una dintre formele:

$$ax^2+bx+c<0,\quad ax^2+bx+c\leq 0,\quad ax^2+bx+c>0,\quad ax^2+bx+c\geq 0,$$

unde $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$.

Algoritm de rezolvare:

1. Calculează discriminantul $\Delta=b^2-4ac$.
2. Dacă $\Delta\geq 0$, calculează rădăcinile $x_{1,2}$.
3. Construiește tabelul de semn al funcției $f(x)=ax^2+bx+c$.

4. Citește din tabel mulțimea soluțiilor (atenție la diferența dintre $<$ și $\leq$).

Exemplu rezolvat. Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuația $x^2-5x+4<0$.
Soluție. $a=1, b=-5, c=4$. $\Delta=25-16=9>0$. $x_{1,2}=(5\pm 3)/2$, deci $x_1=1$, $x_2=4$. Cum $a>0$, semnul este: $+$ pe $(-\infty,1)$, $-$ pe $(1,4)$, $+$ pe $(4,+\infty)$. Vrem $f(x)<0$, deci mulțimea soluțiilor este $(1,4)$.

Inecuații pe intervale. Dacă inecuația este restrânsă la un interval (de exemplu, $x\in[0,5]$), mulțimea soluțiilor se obține *intersectând* mulțimea soluțiilor pe $\mathbb{R}$ cu acel interval.
Exemplu. Rezolvă $x^2-5x+4\leq 0$ pe $[2,5]$. Pe $\mathbb{R}$, mulțimea soluțiilor este $[1,4]$. Intersectând cu $[2,5]$, obținem $[2,4]$.

Bine de știut!

Interpretare geometrică (proiecția pe axa Ox).
Inecuația $f(x)>0$ (cu f funcție de gradul al doilea) cere mulțimea valorilor x pentru care *punctul de pe parabolă* $(x,f(x))$ este *deasupra* axei Ox. Privește graficul: identifică zona în care parabola este deasupra axei. *Proiecția* acelei zone pe axa Ox este mulțimea soluțiilor.
Analog pentru $f(x)<0$: zona unde parabola este *sub* axa Ox, proiectată pe Ox.

Aplicație digitală

Folosește **Desmos** pentru a vizualiza inecuațiile.

- Reprezintă $f(x)=x^2-5x+4$.
- Mută cursorul pe grafic. Când $y<0$ (sub axa Ox), citește valorile lui x corespunzătoare.
- Folosește comanda `f(x) < 0` pentru a hașura zona unde inecuația este verificată.

Exersează!

Tabelul de semn

5 Pentru fiecare funcție, calculează discriminantul, determină rădăcinile (dacă există) și fă tabelul de semn:

a) $f(x)=x^2-7x+12$;
b) $g(x)=-x^2+4x-4$;
c) $h(x)=2x^2-5x-3$;
d) $k(x)=x^2+x+1$.

6 Studiază semnul fiecărei funcții de gradul al doilea:

a) $f(x)=x^2-5x+6$;
b) $g(x)=x^2+2x+5$;
c) $h(x)=-x^2+4x-3$;
d) $p(x)=-2x^2+3x+2$.

Inecuații pe $\mathbb{R}$

7 Rezolvă în $\mathbb{R}$ următoarele inecuații:

a) $x^2-4x+3>0$;
c) $-x^2+5x-6\geq 0$;
b) $x^2-6x+9\leq 0$;
d) $2x^2+x-3<0$.

8 Rezolvă în $\mathbb{R}$ următoarele inecuații, aducând mai întâi toți termenii în același membru:

a) $x^2+x-5\geq 3$;
c) $-5x^2+7x+9\geq 3$;
b) $x^2-3x+4>-10$;
d) $2x^2-5x+1<4x-3$.

9 Rezolvă în $\mathbb{R}$:

a) $x^2-6x+5\leq 0$;
c) $-x^2+4x+5\geq 0$;
b) $x^2+2x-8>0$;
d) $x^2-4x+7>0$.

Model de rezolvare a): $\Delta=36-20=16$. $x_{1,2}=(6\pm 4)/2$, deci $x_1=1$, $x_2=5$. $a=1>0$, deci $f(x)\leq 0 \iff x\in[1,5]$.

Inecuații pe intervale

10 Rezolvă $x^2-9<0$ pe $[-5,0]$.

11 Determină mulțimea soluțiilor inecuației $x^2-4x+3>0$ în $[-1,5]$.

Exerciții diverse

12 Rezolvă în $\mathbb{R}$ următoarele inecuații:

a) $(x-1)(x-4)\leq 0$;
c) $-(x-3)(x+1)\geq 0$;
b) $(x+2)(x-5)>0$;
d) $2(x+4)(x-2)<0$.

13 Se consideră funcția

$$f(x)=x^2-7x+10.$$

a) Determină rădăcinile funcției.
b) Construiește tabelul de semn al funcției.
c) Rezolvă inecuația $f(x)\geq 0$.
d) Rezolvă inecuația $f(x)<0$.

14 Se consideră funcția

$$f(x)=-x^2+6x-8.$$

a) Determină rădăcinile funcției.
b) Studiază semnul funcției pe $\mathbb{R}$.
c) Rezolvă inecuația $f(x)>0$.

d) Rezolvă inecuația $f(x) \leq 0$.

15 Rezolvă în $\mathbb{R}$ următoarele inecuații fracționare:

a) $\dfrac{3x^2-4x-5}{x^2-4} \geq 2$;

b) $\dfrac{2x^2+5x-9}{x^2-1} \geq 3$;

c) $\dfrac{6x^2-x-47}{x^2-9} < 5$;

d) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6} \leq 0$.

16 Rezolvă în $\mathbb{R}$ următoarele inecuații fracționare:

a) $\dfrac{x^2-4x+3}{x-2} > 0$;

b) $\dfrac{-x^2+5x-6}{x+1} \leq 0$;

c) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-1} \geq 0$;

d) $\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-4} < 0$.

17 Rezolvă următoarele inecuații pe intervalele indicate:

a) $x^2-5x+4 \leq 0$, pentru $x \in [-1,3]$;

b) $-x^2+4x+5 > 0$, pentru $x \in [-2,6]$;

c) $2x^2-7x+3 \geq 0$, pentru $x \in [1,4]$;

d) $x^2+2x-8 < 0$, pentru $x \in [-5,1]$.

18 Determină valorile reale ale parametrului m pentru care:

a) inecuația $mx^2-4x+m \geq 0$ este verificată pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

b) inecuația $x^2-2mx+m+3 < 0$ are soluții reale;

c) funcția $f(x) = x^2-(m+3)x+5$ se anulează pentru $x = 1$;

d) mulțimea soluțiilor inecuației $x^2-(m+3)x+5 \leq 0$ este intervalul $[1,5]$.

19 Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$[x^2-5x+4] = 0.$$

Pentru un număr real x, partea întreagă a lui x se notează $[x]$ și reprezintă cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x.

Aplicații practice

20 O minge este aruncată în sus, iar înălțimea ei (în metri) la momentul t (în secunde) este $h(t) = -5t^2+20t+1$. Pe ce interval de timp mingea este la o înălțime de *cel puțin* 11 m? (Adică pentru ce valori ale lui t avem $h(t) \geq 11$?)

Indicație: $h(t) \geq 11 \iff -5t^2+20t-10 \geq 0 \iff t^2-4t+2 \leq 0$.

21 O firmă vrea ca profitul $P(p) = -p^2+80p-1\,200$ (în lei) să fie strict pozitiv. Pentru ce prețuri p se realizează acest lucru?

22 ☆ **Portofoliu.** Determină valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = x^2+2(m+1)x+m^2$ să fie strict pozitivă pe $\mathbb{R}$. (Indicație: trebuie ca $\Delta < 0$.)

Lecția L4.4

Relațiile lui Viète

Amintește-ți!

La ecuația $ax^2+bx+c=0$ (cu $a\neq 0$ și $\Delta\geq 0$) ai învățat să găsești soluțiile prin formula $x_{1,2}=(-b\pm\sqrt{\Delta})/(2a)$.

1. Determină rădăcinile ecuației $x^2-7x+12=0$. Calculează apoi:
   a) $x_1+x_2=?$
   b) $x_1\cdot x_2=?$
   c) Compară cu coeficienții b,c. Ce observi?
2. Repetă pentru ecuația $2x^2-10x+8=0$. Care este de data aceasta legătura cu a,b,c?

Observă și descoperă!

3. Pentru ecuațiile de mai jos, calculează rădăcinile, suma și produsul lor, apoi compară cu coeficienții.

Ecuația	a	b	c	x_1+x_2	$x_1\cdot x_2$
$x^2-5x+6=0$					
$x^2+3x-10=0$					
$2x^2-8x+6=0$					
$3x^2+6x-9=0$					

4. Discută cu colegul: pe baza tabelului, formulează o conjectură despre relațiile dintre suma/produsul rădăcinilor și coeficienții a,b,c. Apoi verifică această conjectură pe încă o ecuație, aleasă de tine.

★ Important!

Teorema lui Viète. Fie $ax^2+bx+c=0$ o ecuație de gradul al doilea ($a\neq 0$), cu $\Delta\geq 0$, având rădăcinile reale x_1 și x_2. Atunci:

$$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a},\qquad P=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Demonstrație. Pornim de la formula soluțiilor:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Adunând și înmulțind:

$$x_1 + x_2 = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})+(-b+\sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

□

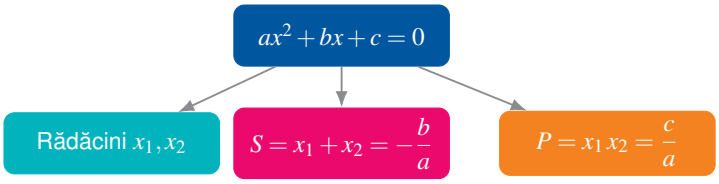
Demonstrație alternativă (factorizare). Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile lui ax^2+bx+c ($\Delta \geq 0$), atunci, din forma canonică (L4.1),

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Dezvoltăm membrul drept:

$$a(x-x_1)(x-x_2) = a\big(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\big) = ax^2 - a(x_1+x_2)x + ax_1x_2.$$

Comparând cu ax^2+bx+c, obținem $-a(x_1+x_2) = b$ și $ax_1x_2 = c$, adică $S = -b/a$ și $P = c/a$.



★ Important!

Problema reciprocă. Dacă cunoaștem suma S și produsul P a două numere reale u, v, putem găsi acele numere ca rădăcini ale ecuației

$$\boxed{t^2 - St + P = 0.}$$

Există două numere reale cu suma S și produsul P dacă și numai dacă $S^2 - 4P \geq 0$.
Justificare: Ecuația de gradul al doilea cu rădăcinile u, v și cu coeficientul lui t^2 egal cu 1 este $t^2-(u+v)t+uv = 0$, adică exact $t^2 - St + P = 0$.

Aplicație rapidă. Găsește două numere a căror sumă este 7 și al căror produs este 12.
Soluție. Cele două numere sunt rădăcinile ecuației $t^2 - 7t + 12 = 0$, adică $t_1 = 3, t_2 = 4$.

Forme utile derivate din relațiile lui Viète. Cu $S = x_1 + x_2$ și $P = x_1x_2$:

- $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=S^2-2P$;
- $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\dfrac{S}{P}$ (dacă $P\neq 0$);
- $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{S^2-4P}=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$;
- $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=S^3-3PS$.

Bine de știut!

Când folosesc relațiile lui Viète?

- Când vrei să calculezi expresii simetrice în rădăcini ($x_1^2+x_2^2$, $1/x_1+1/x_2$ etc.) *fără* să determini efectiv rădăcinile.
- Când cunoști suma și produsul a două numere și vrei să afli numerele.
- Când ai un parametru m în ecuație și vrei ca rădăcinile să verifice o anumită condiție (de exemplu, „$x_1=2x_2$”).

Semnul rădăcinilor. Dacă $\Delta\geq 0$: $P<0\Rightarrow$ rădăcini de semne contrare; $P>0$ și $S>0\Rightarrow$ ambele pozitive; $P>0$ și $S<0\Rightarrow$ ambele negative.

Exersează!

Aplicarea directă a relațiilor lui Viète

5 Pentru fiecare ecuație, calculează $S=x_1+x_2$ și $P=x_1x_2$ *fără* a calcula efectiv rădăcinile:

a) $x^2-9x+14=0$;
c) $-x^2+5x-6=0$;
b) $2x^2+6x-8=0$;
d) $3x^2-12=0$.

Model de rezolvare b): $S=-6/2=-3$, $P=-8/2=-4$.

6 Pentru ecuația $x^2-6x+5=0$, calculează (fără a determina rădăcinile):

a) $x_1^2+x_2^2$;
b) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$;
c) $|x_1-x_2|$.

7 Determină suma și produsul rădăcinilor fiecărei ecuații, fără a calcula rădăcinile:

a) $x^2-5x+6=0$;
c) $-x^2+7x+8=0$;
b) $2x^2+3x-4=0$;
d) $3x^2-2x-5=0$.

8 Determină semnul rădăcinilor fiecărei ecuații, fără a calcula rădăcinile:

a) $t^2-3t-1=0$;

b) $t^2+4t+2=0$;

c) $-t^2-5t-\frac{2}{3}=0$;

d) $2t^2-7t+3=0$.

9 Fie ecuația

$$x^2-5x+4=0,$$

cu rădăcinile x_1 și x_2. Calculează:

a) x_1+x_2;

b) x_1x_2;

c) $x_1^2+x_2^2$;

d) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$;

e) $x_1^3+x_2^3$.

10 Fie ecuația

$$2x^2-3x-5=0,$$

cu rădăcinile x_1 și x_2. Fără a determina explicit rădăcinile, calculează:

a) $x_1^2+x_2^2$;

b) $(x_1-x_2)^2$;

c) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$;

d) $(x_1+1)(x_2+1)$.

Problema reciprocă

11 Determină două numere reale u,v astfel încât:

a) $u+v=8$, $u\cdot v=15$;

b) $u+v=-3$, $u\cdot v=-10$;

c) $u+v=6$, $u\cdot v=9$.

12 Fie $u,v\in\mathbb{R}$. Notăm

$$S=u+v, \qquad P=uv.$$

Determină numerele reale u și v în fiecare dintre cazurile:

a) $S=10$, $P=-5$;

b) $S=20$, $P=75$;

c) $S=-7$, $P=12$;

d) $S=3$, $P=-18$.

13 Scrie o ecuație de gradul al doilea cu coeficientul lui x^2 egal cu 1, ale cărei rădăcini sunt două numere reale cu:

a) suma 7 și produsul 12;

b) suma -4 și produsul -21;

c) suma 0 și produsul -9;

d) suma 5 și produsul $\frac{3}{2}$.

14 Suma dintre lungimea și lățimea unui dreptunghi este 11 m, iar aria lui este 30 m^2. Determină lungimea și lățimea.

Probleme cu parametru

15 Fie ecuația

$$x^2+mx-5m=0,$$

unde $m\in\mathbb{R}$. Determină valorile lui m pentru care ecuația are două rădăcini reale x_1 și x_2 astfel încât

$$x_1<0<x_2.$$

16 Fie ecuația

$$x^2-(m+2)x+2m-3=0,$$

unde $m\in\mathbb{R}$. Determină valorile lui m pentru care:

a) suma rădăcinilor este egală cu 6;

b) produsul rădăcinilor este egal cu 5;

c) rădăcinile sunt opuse;

d) rădăcinile sunt inverse una alteia.

17 Fie ecuația

$$x^2-2(m-1)x+m^2-5=0,$$

unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Exprimă, în funcție de m, suma rădăcinilor.

b) Exprimă, în funcție de m, produsul rădăcinilor.

c) Determină valorile lui m pentru care rădăcinile au semne contrare.

d) Determină valorile lui m pentru care rădăcinile sunt ambele pozitive.

18 Fie ecuația

$$x^2-6x+m=0,$$

cu rădăcinile reale x_1 și x_2. Determină valorile lui m pentru care:

a) $x_1^2+x_2^2=20$;

b) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=2$, unde $x_1x_2\neq 0$;

c) $|x_1-x_2|=4$;

d) $x_1^3+x_2^3=72$.

19 Determină valorile parametrului $m\in\mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile ecuației $x^2-(m+1)x+m=0$ să verifice $x_1+2x_2=5$.

Indicație: Din relațiile lui Viète avem $x_1+x_2=m+1$ și $x_1\cdot x_2=m$. Scăzând relația $x_1+x_2=m+1$ din relația $x_1+2x_2=5$, obținem $x_2=4-m$. Substituim apoi în celelalte relații...

20 ☆ **Portofoliu.** Determină $m\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^2+2(m-1)x+(m^2-3)=0$ să aibă rădăcini reale x_1 și x_2 care să verifice $x_1^2+x_2^2=10$.

Lecția L4.5

Sisteme care conțin ecuații de gradul al doilea

Amintește-ți!

La gimnaziu ai învățat că un *sistem* de ecuații cere ca *toate* ecuațiile să fie verificate *simultan*. În limbajul logicii matematice (U1), aceasta înseamnă conjuncția („și”) a predicatelor care formează sistemul.

1. Rezolvă sistemul liniar (folosind substituția):

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=1 \end{cases}$$

2. Discută cu colegul: dacă o ecuație este de gradul I și cealaltă este de gradul al doilea, putem să folosim aceeași strategie de substituție?

Observă și descoperă!

Două persoane se află la o distanță de 50 km. Pleacă în același timp una spre cealaltă. Andrei merge cu 40 km/h, iar Maria cu 60 km/h. Notăm cu x distanța parcursă de Andrei și cu y distanța parcursă de Maria până se întâlnesc.

3. Scrie un sistem de două ecuații liniare cu necunoscutele x și y. Rezolvă-l.
4. Acum schimbăm contextul. Aria unui dreptunghi este 24 m^2, iar perimetrul lui este 20 m. Notează cu x lungimea și cu y lățimea. Scrie sistemul. Care ecuație este de gradul I și care de gradul al doilea?
5. Discută cu colegul: cum poți rezolva sistemul de mai sus prin substituție?

★ Important!

Strategia de bază: substituția. Pentru un sistem de două ecuații cu două necunoscute (x,y):

1. Din ecuația cea mai simplă (de regulă, cea de gradul I), exprimă o necunoscută în funcție de cealaltă.
2. Substituie în cealaltă ecuație. Obții o ecuație cu o singură necunoscută.
3. Rezolvă noua ecuație.
4. Pentru fiecare valoare găsită, calculează cealaltă necunoscută. Vei obține perechi (x,y), soluțiile sistemului.

Atenție la conjuncție. Conjuncția folosită în rezolvarea unui sistem este, întotdeauna, „și” — toate ecuațiile sunt verificate simultan. Dacă rezolvarea ne conduce la o ecuație factorizată $(x-2)(x-3)=0$,

atunci $x=2$ *sau* $x=3$ (disjuncție în interiorul unei ecuații!) — dar la final, fiecare valoare a lui x trebuie completată cu un y corespunzător, iar perechile (x,y) formează *toate* soluțiile.

★ Important!

Tipul 1: sisteme formate dintr-o ecuație de gradul I și o ecuație de gradul al doilea. Forma generală:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ y=a_2x^2+b_2x+c_2 \end{cases}$$

($a_2\neq 0$; $b_1\neq 0$, adică dreapta nu este paralelă cu axa Oy).
Strategie: Din prima ecuație exprimă y în funcție de x (dacă $b_1\neq 0$), apoi substituie în a doua. Obții o ecuație de gradul al doilea în x.

Interpretare geometrică. Soluțiile sistemului sunt *punctele de intersecție* ale dreptei $a_1x+b_1y+c_1=0$ cu parabola $y=a_2x^2+b_2x+c_2$.

Cazuri posibile:

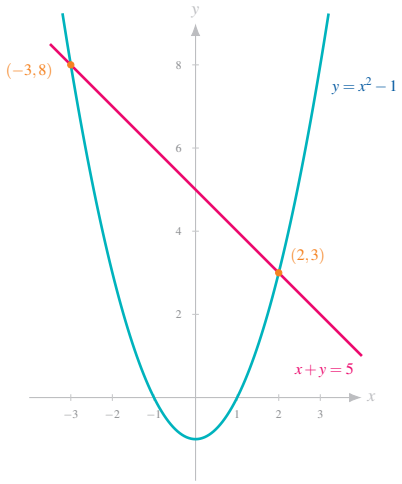
- dreapta și parabola se intersectează în *două* puncte $\Rightarrow$ *două* soluții;
- dreapta este tangentă parabolei $\Rightarrow$ *o* soluție (dublă);
- dreapta nu intersectează parabola $\Rightarrow$ *nicio* soluție reală.

Exemplu rezolvat. Rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ y=x^2-1 \end{cases}$$

Soluție. Din a doua: $y=x^2-1$. Substituim în prima: $x+(x^2-1)=5 \iff x^2+x-6=0$. $\Delta=1+24=25$. $x_{1,2}=(-1\pm 5)/2$, deci $x_1=-3$, $x_2=2$. Pentru $x_1=-3$: $y_1=9-1=8$. Pentru $x_2=2$: $y_2=4-1=3$.

Soluțiile sunt perechile $(-3,8)$ și $(2,3)$. Geometric, dreapta $x+y=5$ intersectează parabola $y=x^2-1$ în aceste două puncte.



★ Important!

Tipul 2: sisteme omogene. Un sistem se numește *omogen* dacă, în membrul stâng al fiecărei ecuații, toți termenii au același grad în raport cu necunoscutele. Formă tipică:

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=d_1 \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=d_2 \end{cases}$$

Strategie: Eliminăm termenii liberi prin combinație liniară. Obținem o ecuație omogenă $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$. Dacă $y\neq 0$, împărțim la y^2: $A(x/y)^2+B(x/y)+C=0$, ecuație de gradul al doilea în raportul x/y. (Cazul $y=0$ se tratează separat.)

Exemplu. Rezolvă $\begin{cases} x^2+xy=6 \\ y^2+xy=10 \end{cases}$

Soluție. Adunând: $x^2+2xy+y^2=16 \iff (x+y)^2=16 \iff x+y=\pm 4$.
Cazul $x+y=4$: $y=4-x$. Substituim în prima: $x^2+x(4-x)=6 \iff 4x=6 \iff x=3/2$, $y=5/2$.
Cazul $x+y=-4$: $y=-4-x$. Substituim: $x^2+x(-4-x)=6 \iff -4x=6 \iff x=-3/2$, $y=-5/2$.
Soluții: $(3/2,5/2)$ și $(-3/2,-5/2)$.
Observație. Aici a fost mai simplu să adunăm ecuațiile. Cu strategia generală: înmulțim prima ecuație cu 10, a doua cu 6 și le scădem: $10x^2+4xy-6y^2=0 \iff 5x^2+2xy-3y^2=0$. Cum $y=0$ nu verifică a doua ecuație, împărțim la y^2 și notăm $t=x/y$: $5t^2+2t-3=0$, deci $t=3/5$ sau $t=-1$. Pentru $x=-y$, prima ecuație devine $0=6$, imposibil; pentru $x=3y/5$, prima ecuație devine $24y^2/25=6$, deci $y=\pm 5/2$ și $x=\pm 3/2$ — aceleași soluții.

★ Important!

Tipul 3: sisteme simetrice. Un sistem este *simetric* dacă rămâne neschimbat la schimbarea $x\leftrightarrow y$. De

exemplu:

$$\begin{cases} x+y=S \\ x\cdot y=P \end{cases}$$

Strategie (problema reciprocă a relațiilor lui Viète). Dacă t_1, t_2 sunt rădăcinile reale ale ecuației $t^2-St+P=0$, soluțiile sistemului sunt perechile (t_1,t_2) și (t_2,t_1). Dacă ecuația nu are rădăcini reale ($S^2-4P<0$), sistemul nu are soluții reale.

Exemplu. Rezolvă $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$

Soluție. x, y sunt rădăcinile ecuației $t^2-7t+12=0$. $\Delta=49-48=1$. $t_{1,2}=(7\pm1)/2$, deci $t_1=3, t_2=4$. Soluții: $(3,4)$ și $(4,3)$.

Reducerea unui sistem simetric general la S,P. Pentru un sistem simetric mai complex (de exemplu, $x^2+y^2=a$ și $x+y+xy=b$), folosim notațiile $S=x+y$, $P=xy$. Atunci:

- $x^2+y^2=S^2-2P$;
- $x^3+y^3=S^3-3PS$;
- $x^2y+xy^2=xy(x+y)=PS$.

Se obține astfel un sistem cu necunoscutele S și P, mai ușor de rezolvat.

Exersează!

Sisteme formate dintr-o ecuație de gradul I și una de gradul al doilea

6 Rezolvă, indicând și interpretarea geometrică:

a) $\begin{cases} y=x^2, \\ x+y=6; \end{cases}$

b) $\begin{cases} y=x^2-4, \\ y=2x-1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y=5, \\ y=x^2+1. \end{cases}$

7 Rezolvă următoarele sisteme și interpretează geometric soluțiile obținute:

a) $\begin{cases} x+y=1, \\ y=x^2-5; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y=1, \\ y=x^2-3x+2; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y=4, \\ y=-x^2+2x+3. \end{cases}$



8 Pentru fiecare sistem de mai sus, ce înseamnă geometric numărul de soluții?

9 Determină numărul soluțiilor reale ale fiecărui sistem, fără a calcula neapărat toate soluțiile:

a) $\begin{cases} y=x+1, \\ y=x^2-3x+5; \end{cases}$

b) $\begin{cases} y=2x-4, \\ y=x^2-2x+4; \end{cases}$

c) $\begin{cases} y=-x+3, \\ y=-x^2+4x-1. \end{cases}$

10 Rezolvă următoarele sisteme:

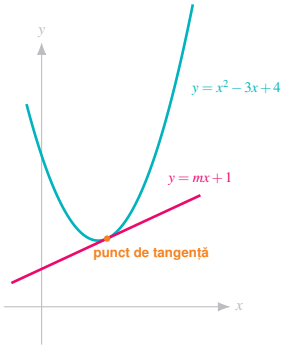
a) $\begin{cases} x+y=5, \\ y=2x^2-3x+1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x-y=2, \\ y=-3x^2+7x-2; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-y=5, \\ y=4x^2+4x-5. \end{cases}$

11 Determină valorile reale ale parametrului m pentru care dreapta și parabola sunt tangente:

$$\begin{cases} y = mx + 1, \\ y = x^2 - 3x + 4. \end{cases}$$



În figură este reprezentată doar una dintre dreptele tangente.

12 Determină valorile reale ale parametrului m pentru care sistemul

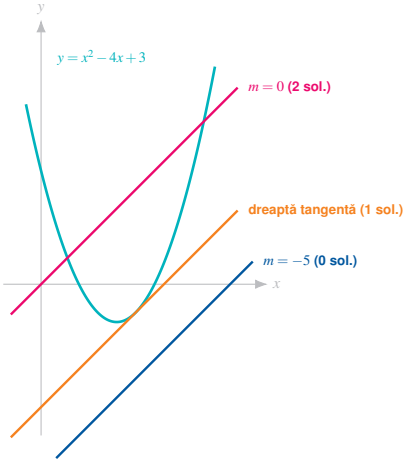
$$\begin{cases} y = x + m, \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

are:

a) două soluții reale distincte;

b) o singură soluție reală;

c) nicio soluție reală.



Sisteme omogene

13 Rezolvă $\begin{cases} x^2 - xy = 6, \\ xy - y^2 = 4. \end{cases}$

Indicație: Adună ecuațiile pentru a obține $x^2-y^2=10$, adică $(x-y)(x+y)=10$. Combină această relație cu una dintre ecuațiile sistemului.

14 Rezolvă următoarele sisteme omogene:

a) $\begin{cases} x^2+xy=12, \\ y^2+xy=4; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+2xy=16, \\ y^2+2xy=21; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x^2+xy=7, \\ 2y^2+xy=12. \end{cases}$

Sisteme simetrice

15 Rezolvă:

a) $\begin{cases} x+y=9, \\ xy=14; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=4, \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=6, \\ x^3+y^3=72. \end{cases}$

Indicație b): Din $x+y=4$ rezultă $S=4$. Din $x^2+y^2=S^2-2P=10$ rezultă $P=3$. Numerele x și y sunt rădăcinile ecuației $t^2-4t+3=0$, adică $t_1=1, t_2=3$. Soluțiile sistemului: $(1,3)$ și $(3,1)$.

16 Rezolvă următoarele sisteme simetrice, folosind notațiile

$$S=x+y, \qquad P=xy.$$

a) $\begin{cases} x+y=10, \\ xy=21; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=11, \\ xy=28; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=-5, \\ xy=6. \end{cases}$

17 Rezolvă următoarele sisteme simetrice:

a) $\begin{cases} x^2+y^2=29, \\ x+y=7; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ xy=15; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ x+y=1. \end{cases}$

18 Rezolvă următoarele sisteme, cu $x \neq 0$ și $y \neq 0$:

a) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{10}, \\ xy=10; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1, \\ x+y=6; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}, \\ x^2+y^2=5, \end{cases}$ cu $x>0$ și $y>0$.

Alte sisteme

19 Rezolvă următoarele sisteme, observând că toate conțin ecuația $x^2+10x-3=0$:

a) $\begin{cases} x^2+10x-3=0, \\ x+y=4; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+10x-3=0, \\ x+2y=5; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+10x-3=0, \\ y=x^2-1. \end{cases}$

Aplicații practice

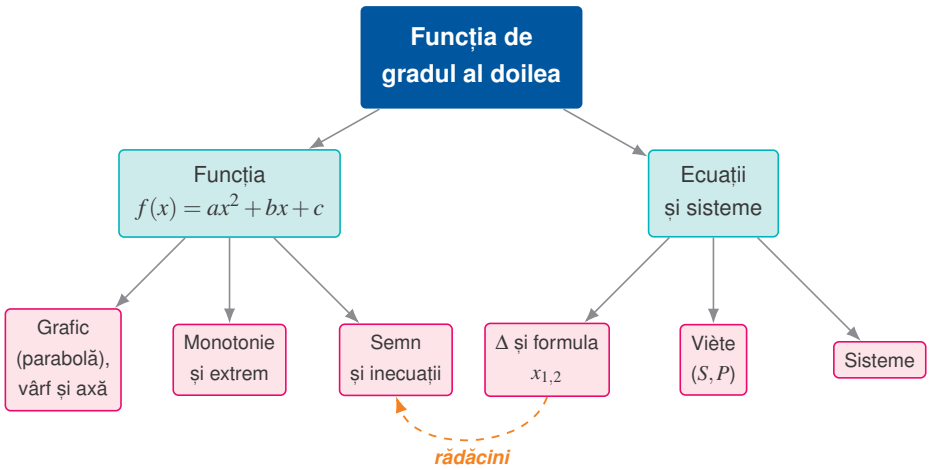
20 Aria unui dreptunghi este 48 m^2 și perimetrul este 28 m. Determină dimensiunile.

21 Suma a două numere este 13 și diferența pătratelor lor este 39. Determină numerele.

22 ☆ **Portofoliu.** Rezolvă sistemul $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x+y=7 \end{cases}$ și interpretează geometric. (Indicație: $x^2+y^2=25$ este ecuația unui cerc cu centrul în origine și raza 5; $x+y=7$ este ecuația unei drepte.)

Recapitulare

Hartă conceptuală



De reținut!

La finalul acestei unități trebuie să poți:

- recunoaște o funcție de gradul al doilea, determina coordonatele vârfului și axa de simetrie și o reprezenta grafic;
- aplica formula $x_{1,2}=(-b\pm\sqrt{\Delta})/(2a)$ și interpreta cele 3 cazuri ($\Delta>0, =0, <0$);
- construi tabelul de variație și de semn pentru o funcție de gradul al doilea;
- rezolva inecuații de gradul al doilea pe $\mathbb{R}$ și pe intervale, cu interpretare grafică;
- aplica relațiile lui Viète ($S=-b/a$, $P=c/a$) și rezolva problema reciprocă;
- rezolva sisteme cu o ecuație de gradul I și una de gradul al doilea, sisteme simetrice și omogene.

Sarcini de sinteză

Exersează!

1 Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+4x-3$:

a) Determină vârful, axa de simetrie, intersecțiile cu axele.

b) Construiește tabelul de variație și tabelul de semn.

c) Reprezintă grafic.

d) Rezolvă inecuația $f(x) > 0$.

2 Pentru ecuația $x^2 - (m+2)x + (m+1) = 0$, $m \in \mathbb{R}$:

a) Verifică, prin calcul, că $x = 1$ este *întotdeauna* soluție (independent de m).

b) Determină a doua soluție x_2 în funcție de m (folosind relațiile lui Viète).

c) Știind că $x_1 = 1$, determină m astfel încât $x_1 + 2x_2 = 7$.

3 Rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

și interpretează geometric ($x^2 + y^2 = 13$ este ecuația cercului cu centrul în origine și raza $\sqrt{13}$; $x + y = 5$ este ecuația unei drepte).

4 ☆ **Portofoliu.** O minge de tenis este aruncată în sus de la o înălțime de 1 m, cu viteza inițială v_0. Înălțimea (în metri) la momentul t (în secunde) este $h(t) = -5t^2 + v_0 t + 1$.

a) Dacă mingea atinge înălțimea maximă de 5 m, care este viteza inițială v_0? (Indicație: determină v_0 astfel încât $-\Delta/(4a) = 5$.)

b) După cât timp atinge mingea înălțimea maximă?

c) După cât timp revine mingea la sol ($h = 0$)?

5 (*Ecuația cu rădăcini date*) Determină o ecuație de gradul al doilea, cu coeficientul lui x^2 egal cu 1, ale cărei rădăcini sunt $x_1 = 3$ și $x_2 = -7$. *Indicație:* folosește $S = x_1 + x_2$ și $P = x_1 \cdot x_2$, apoi formula $x^2 - Sx + P = 0$.

6 (*Sistem omogen*) Rezolvă în $\mathbb{R}^2$ sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Indicație: prima ecuație se scrie $(x-y)(x-2y) = 0$, deci $x = y$ **sau** $x = 2y$; analizează separat cele două cazuri.

7 (*Aplicație fizică*) Un cablu suspendat între doi stâlpi are, aproximativ, forma unei parabole. Înălțimea cablului deasupra solului, la distanța de x metri de primul stâlp, este dată de $h(x) = 0{,}1\,(x-10)^2 + 5$ metri (unde $0 \le x \le 20$).

a) Care este înălțimea minimă a cablului? La ce distanță de primul stâlp se atinge?

b) Care este înălțimea celor doi stâlpi (la $x = 0$ și $x = 20$)?

c) Pentru ce valori ale lui x înălțimea cablului depășește 7,5 m?

8 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - 6x + 5.$$

a) Scrie funcția în formă canonică.

b) Determină vârful parabolei și axa de simetrie.

c) Stabilește intervalele de monotonie ale funcției.

d) Determină rădăcinile funcției și studiază semnul lui $f(x)$ pe $\mathbb{R}$.

e) Rezolvă inecuația $f(x) \leq 0$.

9 Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 + 5x - 4$$

și

$$g(x) = -x^2 + 7x + 10.$$

a) Determină punctul de minim al funcției f.

b) Determină punctul de maxim al funcției g.

c) Determină funcția $h = f + g$.

d) Studiază monotonia funcției h.

e) Rezolvă ecuația $f(x) = g(x)$ și interpretează geometric rezultatul.

10 Fie ecuația

$$x^2 - 2026x + 2025 = 0,$$

cu rădăcinile x_1 și x_2.

a) Determină $x_1 + x_2$ și $x_1 x_2$, fără a calcula rădăcinile.

b) Calculează $x_1^2 + x_2^2$.

c) Calculează $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.

d) Calculează $x_1^3 + x_2^3$.

e) Determină rădăcinile ecuației.

11 Determină valorile reale ale parametrului m pentru care ecuația

$$x^2 - (m+1)x + m - 4 = 0$$

are două rădăcini reale x_1 și x_2 astfel încât

$$x_1 < 0 < x_2.$$

12 Rezolvă următoarele sisteme:

a) $\begin{cases} x + y = 5, \\ y = x^2 - 3x + 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 1, \\ y = -x^2 + 4x + 2; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 10, \\ xy = 24; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x + y = 6. \end{cases}$

13 Reamintim că, pentru un număr real x, partea întreagă a lui x se notează $[x]$ și reprezintă cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x.

De exemplu:

$$[3{,}7] = 3, \qquad [5] = 5, \qquad [-2{,}4] = -3.$$

Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$[x^2 - 3x + 2] = 0.$$

14 ☆ Determină valorile reale ale parametrului m pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2mx+m+6$, are graficul situat deasupra axei Ox pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Indicație: condiția cerută este $a>0$ **și** $\Delta<0$.

15 Pentru fiecare funcție din tabel ($f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$), completează: coordonatele vârfului, tipul extremului și intervalele de monotonie.

Funcția	Vârful parabolei	Minim/Maxim	Intervale de monotonie
$f(x)=x^2-8x+12$			
$g(x)=-2x^2+12x-16$			
$h(x)=2026x^2+4$			

16 Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=x^2+6x+5,\qquad g(x)=-x^2+2x+8.$$

a) Scrie fiecare funcție în formă canonică și determină vârful parabolei.

b) Determină rădăcinile celor două funcții.

c) Folosind rădăcinile și orientarea fiecărei parabole, rezolvă inecuațiile

$$f(x)\le 0,\qquad g(x)>0.$$

17 Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=x^2+4x-5,\qquad g(x)=-3x^2+8x+7.$$

a) Determină funcțiile $f+g$ și $f-g$.

b) Pentru fiecare dintre funcțiile obținute, precizează dacă are minim sau maxim și determină valoarea extremă.

c) Compară intervalele de monotonie ale funcțiilor $f+g$ și $f-g$.

18 Determină $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=x^2-mx+(m+n),$$

să aibă axa de simetrie $x=2$ și să verifice $f(0)=9$.
Pentru valorile găsite, scrie funcția în formă canonică și dedu valoarea minimă. Explică apoi de ce

$$f(x)>0,\quad \text{pentru orice } x\in\mathbb{R}.$$

19 Graficul unei funcții de gradul al doilea are vârful în punctul

$$V(1,-4)$$

și trece prin punctul $A(3,0)$.

a) Determină expresia funcției.

b) Scrie funcția în forma generală și determină rădăcinile.

c) Folosind graficul, precizează semnul funcției și intervalele de monotonie.

20 Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=-x^2+7x-6,$$

și dreapta d de ecuație $y=2x-6$.

a) Determină punctele comune ale graficului funcției f cu dreapta d.

b) Rezolvă inecuația

$$f(x)\geq 2x-6.$$

c) Interpretează grafic rezultatul obținut.

21 Se consideră ecuația

$$x^2-(m+3)x+3m=0,$$

unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Arată că ecuația se poate scrie sub forma

$$(x-3)(x-m)=0.$$

b) Determină rădăcinile ecuației în funcție de m.

c) Determină valorile lui m pentru care rădăcinile sunt egale.

d) Determină valorile lui m pentru care rădăcinile sunt pozitive și distincte.

22 Se consideră parabola

$$y=x^2-4x+1$$

și familia de drepte

$$y=2x+k,\quad k\in\mathbb{R}.$$

a) Determină punctele comune ale parabolei cu dreapta $y=2x-7$ și interpretează geometric rezultatul.

b) Determină valoarea lui k pentru care dreapta $y=2x+k$ este tangentă la parabolă.

c) Determină valorile lui k pentru care dreapta $y=2x+k$ are două puncte comune distincte cu parabola.

23 Într-un laborator, temperatura T, exprimată în grade Celsius, a unei soluții este modelată în funcție de timpul t, exprimat în minute, prin funcția

$$T(t)=-t^2+8t+20,$$

unde $t\in[0,10]$.

a) Determină temperatura inițială și temperatura după 10 minute.

b) Determină momentul în care temperatura este maximă și calculează această temperatură.

c) Determină intervalul de timp în care temperatura este de cel puțin 32°C.

24 ☆ **Portofoliu.** Fie

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}.$$

Demonstrează inegalitatea

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geq \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n\right)^2.$$

Indicație. Consideră funcția

$$F(x) = (a_1 x + b_1)^2 + (a_2 x + b_2)^2 + \cdots + (a_n x + b_n)^2.$$

a) Observă că $F(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, inegalitatea devine $0 \geq 0$. Altfel, $a_1^2 + \cdots + a_n^2 > 0$, deci poți scrie $F(x)$ ca funcție de gradul al doilea în x.

c) Folosește faptul că o funcție de gradul al doilea nenegativă pe $\mathbb{R}$ are discriminantul mai mic sau egal cu 0.

Proiect: Parabole în lumea reală

În jurul nostru există situații care pot fi descrise aproximativ printr-o parabolă: traiectoria unei mingi, jetul unei fântâni arteziene, forma unui arc, a unei porți, a unui pod sau a unui element de design. În acest proiect veți studia o astfel de situație, o veți modela printr-o funcție de gradul al doilea și veți interpreta rezultatele obținute.

Ce veți face și de ce?

Veți lucra în echipe de 3–4 elevi. Fiecare echipă va alege o situație reală care poate fi modelată printr-o funcție de forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Veți colecta sau estima date, veți construi modelul, veți reprezenta grafic funcția și veți răspunde la întrebări de interpretare și optimizare. Veți folosi funcția de gradul al doilea, vârful parabolei, rădăcinile, semnul, monotonia, ecuațiile, inecuațiile, sistemele și, dacă are sens, relațiile lui Viète într-un context real.

Cum veți face?

1. **Alegeți situația studiată.** Formulați o întrebare de pornire: „Care este înălțimea maximă?”, „Unde atinge solul?”, „Este suficient spațiul disponibil?”, „Cum modificăm modelul pentru un rezultat mai bun?”.

2. **Organizați datele.** Notați trei puncte necoliniare ale situației, cu abscise diferite, sub forma (x, y), unde x poate reprezenta distanța orizontală sau timpul, iar y înălțimea sau mărimea studiată. Datele pot fi măsurate, estimate dintr-o fotografie sau alese realist.

3. **Construiți modelul.** Determinați funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$ al cărei grafic trece prin cele trei puncte, rezolvând sistemul obținut (sugestie: alegeți un punct cu $x = 0$, ca să aflați direct c). Dacă aveți mai multe puncte măsurate, verificați cât de aproape de grafic se află celelalte.

4. **Reprezentați și interpretați.** Folosiți GeoGebra/Desmos. Marcați vârful, axa de simetrie și rădăcinile. Explicați ce reprezintă vârful, rădăcinile sau lipsa lor, intervalele de monotonie și schimbarea semnului. Dacă are sens, interpretați suma și produsul rădăcinilor.

5. **Optimizați modelul.** Propuneți o modificare a funcției: de exemplu, o minge care ajunge de 3 ori mai sus, un jet care cade cu 10 m mai departe etc. Justificați modificarea prin grafic și calcule.

6. **Prezentați rezultatele.** Realizați o fișă A4, un poster sau o prezentare digitală care să conțină: situația aleasă, tabelul de date, funcția obținută, graficul, interpretarea elementelor parabolei, modificarea propusă și concluzia echipei.

Cum veți ști că ați reușit?

Vă veți evalua folosind grila de mai jos; domnul/doamna profesor și colegii vor face, de asemenea, aprecieri.

Autoevaluare

Criterii de autoevaluare	În totalitate	Parțial	Deloc
Am ales o situație potrivită pentru modelare.	☐	☐	☐
Am organizat datele și am determinat funcția de gradul al doilea.	☐	☐	☐
Am reprezentat grafic funcția și am marcat elementele importante.	☐	☐	☐
Am interpretat vârful, rădăcinile, monotonia și semnul funcției.	☐	☐	☐
Am propus o modificare justificată a modelului.	☐	☐	☐

Evaluare — U4

45 de minute · 90 p + 10 p din oficiu

Subiectul I (20 de puncte)

1. **(5 p)** Pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+8$, vârful parabolei are coordonatele:

☐ $(3,-1)$ ☐ $(-3,-1)$ ☐ $(3,1)$ ☐ $(6,8)$

2. **(5 p)** Discriminantul ecuației $2x^2-4x+5=0$ este $\Delta=$ _____, deci ecuația are:

☐ două soluții reale distincte ☐ o soluție reală dublă ☐ nicio soluție reală

3. **(5 p)** Pentru ecuația $x^2-7x+12=0$, suma și produsul rădăcinilor sunt:

☐ $S=7,\ P=12$ ☐ $S=-7,\ P=12$ ☐ $S=7,\ P=-12$ ☐ $S=12,\ P=7$

4. **(5 p)** Mulțimea soluțiilor inecuației $x^2-4\le 0$ este:

☐ $[-2,2]$ ☐ $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ ☐ $(-2,2)$ ☐ $\mathbb{R}$

Subiectul II (30 de puncte)

5. **(15 p)** Pentru ecuația $x^2-8x+15=0$:

Suma rădăcinilor $S=x_1+x_2=$ _____

Produsul rădăcinilor $P=x_1\cdot x_2=$ _____

Rădăcinile sunt $x_1=$ _____ și $x_2=$ _____.

$x_1^2+x_2^2=$ _____

6. **(15 p)** Pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+5$:

Rădăcinile sunt $x_1=$ _____ și $x_2=$ _____.

Vârful parabolei: $V\left(\text{_____},\ \text{_____}\right)$

Valoarea minimă a funcției este _____.

Mulțimea soluțiilor inecuației $f(x)\le 0$ este _____.

Subiectul III (40 de puncte)

7. **(20 p)** Pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+4x+5$:

a) Determină rădăcinile funcției, vârful parabolei și axa de simetrie.

b) Construiește tabelul de variație și tabelul de semn.

c) Reprezintă grafic funcția.

d) Rezolvă inecuația $f(x) \geq 0$.

Vor fi notate distinct:

- determinarea rădăcinilor, a vârfului și a axei de simetrie ..... 5 puncte;
- tabelul de variație și tabelul de semn ..... 5 puncte;
- reprezentarea grafică ..... 5 puncte;
- rezolvarea inecuației ..... 5 puncte.

8. **(20 p)** Un fermier are 40 m de gard și vrea să închidă o suprafață dreptunghiulară pentru animale, lipită de un perete. Gardul este folosit doar pentru cele trei laturi care nu coincid cu peretele.

a) Notează cu x lățimea perpendiculară pe perete. Exprimă lungimea L, paralelă cu peretele, în funcție de x.

b) Exprimă aria $A(x)$ în funcție de x.

c) Determină valoarea lui x pentru care aria este maximă și calculează aria maximă.

d) Determină pentru ce valori ale lui x aria depășește 150 m^2.

Vor fi notate distinct:

- modelarea (exprimarea lui L și a ariei $A(x)$ în funcție de x) ..... 5 puncte;
- determinarea valorii maxime (vârful parabolei) ..... 5 puncte;
- interpretarea numerică ($x =$?, aria $=$?) ..... 5 puncte;
- rezolvarea inecuației $A(x) > 150$ ..... 5 puncte.

Notă: 10 puncte se acordă din oficiu. Total: 100 de puncte. Timp de lucru: 45 de minute.

Exersezi, corectezi, progresezi

Pentru fiecare dintre cele două probleme de la subiectul III, ai aici sarcini pe trei niveluri: **Ameliorare**, **Echivalent** și **Dezvoltare**. În funcție de rezultatul obținut la test, începe cu nivelul potrivit și continuă cu următoarele.

Pentru subiectul III, itemul 7 (funcția de gradul al doilea)

Ameliorare

Pas cu pas, refă rezolvarea.

1. Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x-3$:
   a) Calculează $\Delta=b^2-4ac$.
   b) Rezolvă $f(x)=0$ folosind formula $x_{1,2}=(-b\pm\sqrt{\Delta})/(2a)$.
   c) Calculează coordonatele vârfului V: $x_V=-b/(2a)$, apoi $y_V=f(x_V)$.
2. Construiește tabelul de variație al lui f (cu $a=1>0$, deci minim în x_V).
3. Construiește tabelul de semn (folosește rădăcinile găsite).

Echivalent

Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-8$:

a) Determină rădăcinile, vârful și axa de simetrie.

b) Construiește tabelul de variație și de semn.

c) Reprezintă grafic.

d) Rezolvă inecuația $f(x)<0$.

Dezvoltare

Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2mx+(m^2-1)$, unde m este un parametru real:

a) Calculează rădăcinile în funcție de m.

b) Determină coordonatele vârfului în funcție de m. Pe ce curbă se află vârful când m variază?

c) Arată că, pentru orice $m\in\mathbb{R}$, mulțimea soluțiilor inecuației $f(x)\le 0$ este un interval de lungime 2. (Indicație: lungimea intervalului dintre rădăcini este $|x_2-x_1|$.)

Pentru subiectul III, itemul 8 (modelare cu funcția de gradul al doilea)

Ameliorare

Pas cu pas, modelează problema.

1 Andrei vrea să închidă o curte dreptunghiulară cu 20 m de gard (toate cele 4 laturi).

a) Dacă o latură măsoară x m, cât măsoară latura adiacentă? (Folosește perimetrul.)

b) Scrie aria $A(x)$ în funcție de x.

c) Calculează $A(2), A(5), A(8)$. Pentru care dintre aceste valori aria este cea mai mare?

Echivalent

Un fermier are 60 m de gard și vrea să închidă o suprafață dreptunghiulară pentru animale, lipită de un perete (gardul se folosește pentru trei laturi).

a) Notează cu x lățimea (latura perpendiculară pe perete) și exprimă aria $A(x)$ în funcție de x.

b) Pentru ce valoare a lui x aria este maximă?

c) Care este aria maximă?

Dezvoltare

Două zone separate. Un fermier are 80 m de gard și vrea să închidă o suprafață dreptunghiulară, *împărțită în două* printr-un gard interior paralel cu una dintre laturi. (Deci, în total, cei 80 m de gard se folosesc pentru cele 4 laturi exterioare și pentru gardul interior.)

a) Notează cu x una dintre laturile dreptunghiului (perpendiculară pe gardul interior). Cealaltă latură are lungimea y. Scrie ecuația care leagă x și y de cei 80 m.

b) Exprimă aria $A(x)$ în funcție de x.

c) Pentru ce valoare a lui x aria este maximă? Care este aria maximă?

d) Compară cu situația fără gard interior. În care dintre cele două situații aria maximă este mai mare?

Autoevaluare

Bifează enunțurile care descriu ce poți face singur, fără ajutor:

- ☐ Pot recunoaște o funcție de gradul al doilea din formula ei.
- ☐ Pot determina coordonatele vârfului și axa de simetrie și pot reprezenta grafic o parabolă.
- ☐ Cunosc formula $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ și interpretez cele 3 cazuri ($\Delta > 0, = 0, < 0$).
- ☐ Pot construi tabelul de variație al unei funcții de gradul al doilea.
- ☐ Pot determina semnul unei funcții de gradul al doilea și pot rezolva inecuații pe $\mathbb{R}$ și pe intervale.
- ☐ Folosesc relațiile lui Viète: $S = -b/a$, $P = c/a$, atât direct, cât și pentru a calcula expresii simetrice.
- ☐ Pot rezolva problema reciprocă: cunoscând S și P, găsesc cele două numere.
- ☐ Pot rezolva sisteme formate dintr-o ecuație de gradul I și una de gradul al doilea, sisteme simetrice și sisteme omogene.
- ☐ Pot discuta numărul de soluții ale unei ecuații de gradul al doilea cu parametru, folosind Δ.
- ☐ Pot modela situații din viața reală cu ajutorul funcției de gradul al doilea (optimizare, traiectorii).

Cum interpretezi rezultatul?

- Dacă ai bifat **9–10 enunțuri**: stăpânești conținutul unității. Treci cu încredere la U5 (Funcția putere cu exponent întreg. Funcția radical) și încearcă sarcinile cu ☆ din lecțiile parcurse.
- Dacă ai bifat **6–8 enunțuri**: ești pe drumul cel bun. Reia sarcinile de tip „Echivalent” din secțiunea „Exersezi, corectezi, progresezi” înainte de a începe U5.
- Dacă ai bifat **0–5 enunțuri**: solicită sprijinul profesorului. Reia sarcinile de tip „Ameliorare” din secțiunea „Exersezi, corectezi, progresezi” împreună cu un coleg cu care lucrezi bine.

Reflectează:

- Care a fost cel mai dificil concept din această unitate? De ce?
- Care a fost cea mai utilă imagine: graficul parabolei, tabelul de semn, tabelul de variație, schema Viète?
- Cum te ajută semnul lui a și al lui Δ să „citești” forma parabolei fără a o desena complet?
- Ce situație din viața reală poți modela acum cu ajutorul funcției de gradul al doilea?

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE

U5

Funcția putere cu exponent întreg. Funcția radical

A ridica la putere și a extrage radicalul sunt două drumuri pe aceeași cărare: unul dus, celălalt întors.

Lecțiile unității

- L5.1 — Funcția putere cu exponent întreg
- L5.2 — Radicali. Operații. Funcția radical
- L5.3 — Ecuații și inecuații cu radicali
- Recapitulare · Evaluare · Exersezi, corectezi, progresezi · Autoevaluare

Ce vei învăța

- să studiezi funcția putere cu exponent întreg (paritate, monotonie, grafic);
- să calculezi cu radicali și să raționalizezi numitori;
- să reprezinți grafic și să studiezi funcția radical;
- să rezolvi ecuații și inecuații cu radicali, verificând condițiile de existență;
- să modelezi situații practice cu funcții putere și radical.



Lecția L5.1

Funcția putere cu exponent întreg

Amintește-ți!

La gimnaziu ai învățat că x^n, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, înseamnă $\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ ori}}$. Pentru exponent zero sau negativ, dacă $x \neq 0$:

$$x^0 = 1, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

1 Calculează:

a) 2^4, $(-2)^4$, $(-2)^5$;

b) 3^{-2}, $(-3)^{-2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$;

c) 0^4, 0^{-2} (atenție!).

2 Discută cu colegul: ce diferență vezi între puterile cu exponent par și cele cu exponent impar pentru $x = -2$?

Observă și descoperă!

3 Reprezintă pe același reper graficele funcțiilor:

- $f(x) = x^2$ (pătrat);
- $g(x) = x^3$ (cub);
- $h(x) = x^4$;
- $k(x) = x^5$.

4 Pentru fiecare funcție, răspunde:

a) Este pară sau impară?

b) Pe ce interval este crescătoare? Pe ce interval este descrescătoare?

c) Care este imaginea funcției?

5 Discută cu colegul: există o regulă generală care leagă paritatea exponentului (n par sau n impar) de proprietățile graficului?

★ **Important!**

Definiție. Pentru $n \in \mathbb{Z}$, *funcția putere de exponent n* se definește astfel:

- Dacă $n \in \mathbb{N}^*$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$.
- Dacă $n = 0$: $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^0 = 1$ (0^0 nu este definit).
- Dacă $n \in \mathbb{Z}, n < 0$: $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$.

Cazul $n \in \mathbb{N}^*, n$ par. Notăm $n = 2k$, $k \geq 1$. Funcția $f(x) = x^{2k}$ are proprietățile:

- *pară*: $f(-x) = (-x)^{2k} = x^{2k} = f(x)$ (simetrie față de Oy);
- *strict descrescătoare* pe $(-\infty, 0]$, *strict crescătoare* pe $[0, +\infty)$;
- are *minim* în 0, $f(0) = 0$;
- $\operatorname{Im} f = [0, +\infty)$;
- *nu este injectivă* pe $\mathbb{R}$ ($f(-x) = f(x)$).

Cazul $n \in \mathbb{N}^*, n$ impar. Notăm $n = 2k+1$. Funcția $f(x) = x^{2k+1}$ are proprietățile:

- *impară*: $f(-x) = (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1} = -f(x)$ (simetrie față de origine);
- *strict crescătoare* pe $\mathbb{R}$;
- nu are puncte de extrem;
- $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$;
- *injectivă* pe $\mathbb{R}$ (rezultă din monotonia strictă).

Cazul $n \in \mathbb{Z}, n < 0$. Funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, este *pară* dacă n este par și *impară* dacă n este impar.

- Dacă n este par: f este *strict crescătoare* pe $(-\infty, 0)$, *strict descrescătoare* pe $(0, +\infty)$, $\operatorname{Im} f = (0, +\infty)$ și *nu este injectivă*.
- Dacă n este impar: f este *strict descrescătoare* pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, +\infty)$ (dar nu pe $\mathbb{R}^*$), $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^*$ și este *injectivă*.

★ **Important!**

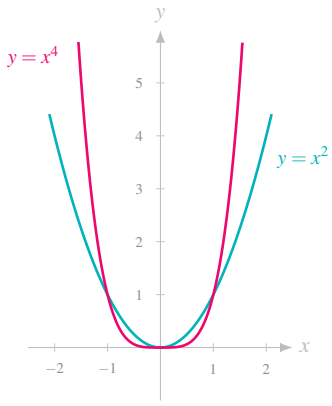
Demonstrație: monotonia funcției $f(x) = x^n$ pe $[0, +\infty)$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.
Fie $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ cu $0 \leq x_1 < x_2$. Folosim factorizarea:

$$x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \cdots + x_2x_1^{n-2} + x_1^{n-1}).$$

Primul factor $x_2 - x_1 > 0$. Al doilea factor este o sumă de n termeni, fiecare ≥ 0, iar pentru $x_2 > 0$ avem $x_2^{n-1} > 0$, deci suma este > 0. Așadar $x_2^n - x_1^n > 0$, deci $f(x_1) < f(x_2)$. □

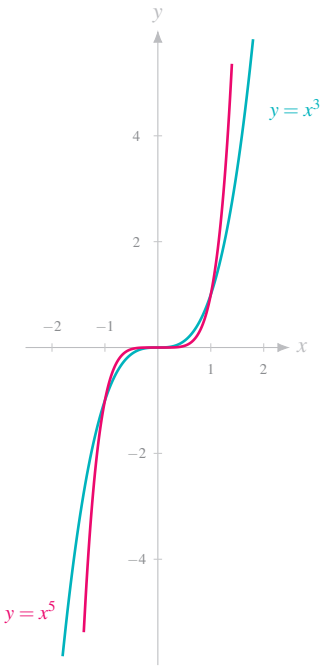
Demonstrație: injectivitatea funcției $f(x) = x^n$ pentru n impar.
Pentru n impar, f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Pe $[0, +\infty)$, acest lucru rezultă din demonstrația de mai sus. Dacă $x_1 < x_2 \leq 0$, atunci $0 \leq -x_2 < -x_1$, deci $(-x_2)^n < (-x_1)^n$, adică $-x_2^n < -x_1^n$, de unde $x_1^n < x_2^n$. Dacă $x_1 < 0 < x_2$, atunci $x_1^n < 0 < x_2^n$. (Analog, pentru n par, din $0 \leq -x_2 < -x_1$ rezultă $x_2^n = (-x_2)^n < (-x_1)^n = x_1^n$, deci f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$.) Rezultă că f este injectivă: dacă $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $x_1 = x_2$ (altfel, una dintre relațiile $x_1 < x_2$ sau $x_2 < x_1$ ar duce la contradicție prin monotonie strictă). □

Surjectivitate (justificare intuitivă). Pentru n impar, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este surjectivă: f ia orice valoare reală, deoarece graficul ei este o curbă neîntreruptă, care coboară oricât de jos pentru x negativ și urcă oricât de sus pentru x pozitiv; deci orice dreaptă orizontală $y = b$ îl intersectează. (Demonstrația riguroasă va fi făcută în clasa a XI-a.)
Așadar funcția $f(x) = x^n$ cu n impar este *bijectivă* de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$.
Pentru n par, $f(x) = x^n$ *nu* este bijectivă pe $\mathbb{R}$. Însă *restricția* $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^n$, este bijectivă (este strict crescătoare și ia orice valoare ≥ 0).



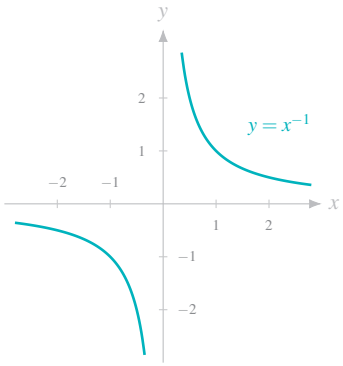
n par

pară, simetrică față de Oy



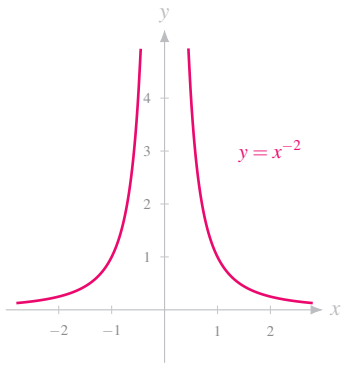
n impar

impară, simetrică față de O



$n = -1$

impară, simetrică față de O



$n = -2$

pară, simetrică față de Oy

Aplicație digitală

Folosește **Desmos** pentru a explora.

- Reprezintă $f(x) = x^n$, folosind un glisor (slider) pentru exponentul întreg n, cu valori în mulțimea $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Compară graficele: care funcții sunt pare? Care impare? Care monotone?
- Pentru $n < 0$, observă comportamentul în vecinătatea lui 0. Ce se întâmplă?

Exersează!

Identifică proprietățile

6 Pentru fiecare funcție, precizează paritatea, monotonia, imaginea și dacă este injectivă pe domeniul de definiție:

a) $f(x) = x^4$;

b) $g(x) = x^7$;

c) $h(x) = x^{-2}$, $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$;

d) $k(x) = x^{-3}$, $k : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$.

Demonstrație formală

7 Demonstrează că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5$, este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
Indicație: Pentru $x_1 < x_2$, calculează $x_2^5 - x_1^5 = (x_2 - x_1)(x_2^4 + x_2^3 x_1 + x_2^2 x_1^2 + x_2 x_1^3 + x_1^4)$. Arată că al doilea factor este > 0 când $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$.

8 Pentru fiecare dintre funcțiile următoare, precizează domeniul de definiție, paritatea și imaginea funcției:

a) $f(x) = x^2$;

b) $g(x) = x^3$;

c) $h(x) = x^4$;

d) $p(x) = x^5$.

9 Studiază monotonia fiecărei funcții:

a) $f(x) = x^2$;

b) $g(x) = x^4$;

c) $h(x) = x^3$;

d) $p(x) = x^5$.

10 Alcătuiește tabelul de variație pentru fiecare funcție:

a) $f(x) = x^2$;

b) $g(x) = x^6$;

c) $h(x) = x^3$;

d) $p(x) = x^7$.

11 Pentru fiecare funcție, precizează dacă este injectivă pe $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^2$;

b) $g(x) = x^3$;

c) $h(x) = x^8$;

d) $p(x) = x^9$.

12 Pentru fiecare funcție, stabilește dacă este pară, impară sau nici pară, nici impară:

a) $f(x) = x^{10}$;

b) $g(x) = x^{11}$;

c) $h(x) = x^4 + x^2$;

d) $p(x) = x^5 + x$.

13 Rezolvă în $\mathbb{R}$ următoarele ecuații:

a) $x^2 = 16$;

b) $x^3 = 27$;

c) $x^4 = 81$;

d) $x^5 = -32$.

14 Rezolvă în $\mathbb{R}$ următoarele inecuații:

a) $x^2 \leq 9$;

b) $x^4 > 16$;

c) $x^3 < 8$;

d) $x^5 \geq -1$.

15 Demonstrează că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^7$, este injectivă.

Restricții, inverse, paritate

16 Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$, nu este injectivă. Restrânge-o astfel încât să fie bijectivă, indicând restricția domeniului și a codomeniului.

17 Pentru $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = x^{-2}$:

a) Demonstrează că f este strict descrescătoare.

b) Este f bijectivă? Justifică.

18 Se consideră funcția

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^n,$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Determină valorile lui n pentru care funcția este pară.

b) Determină valorile lui n pentru care funcția este impară.

c) Determină valorile lui n pentru care funcția este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

d) Determină valorile lui n pentru care funcția are minim în 0.

19 Se consideră funcția

$$f : [0, +\infty) \to [0, +\infty), \qquad f(x) = x^4.$$

a) Arată că funcția este strict crescătoare pe $[0, +\infty)$.

b) Arată că funcția este injectivă.

c) Arată că funcția este surjectivă.

d) Explică de ce funcția este bijectivă.

20 Pentru fiecare funcție, precizează domeniul de definiție și studiază paritatea:

a) $f(x) = x^{-1}$;

b) $g(x) = x^{-2}$;

c) $h(x) = x^{-3}$;

d) $p(x) = x^{-4}$.

21 Se consideră funcția

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x + 6.$$

a) Determină $f(-x)$.

b) Calculează
$$f_p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$

c) Calculează
$$f_i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

d) Verifică faptul că f_p este funcție pară și f_i este funcție impară.

22 Pentru fiecare dintre funcțiile următoare, scrie funcția ca sumă dintre o funcție pară și o funcție impară:

a) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 5$;

b) $g(x) = 2x^5 - x^4 + 7x^2 - x + 1$;

c) $h(x) = x^6 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 8$;

d) $p(x) = 5x^7 - 2x^5 + x^4 - 6x + 9$.

23 Determină funcția pară f_p și funcția impară f_i astfel încât
$$f(x) = f_p(x) + f_i(x),$$
pentru fiecare dintre funcțiile:

a) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$;

b) $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x - 7$;

c) $f(x) = x^6 + x^5 - x^2 - 2x + 4$;

d) $f(x) = -x^7 + 3x^4 - 6x^3 + x - 10$.

24 Se consideră funcția
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$
unde $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

a) Determină partea pară a funcției f, adică funcția $f_p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$.

b) Determină partea impară a funcției f, adică funcția $f_i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

c) Precizează condițiile asupra coeficienților pentru ca f să fie funcție pară.

d) Precizează condițiile asupra coeficienților pentru ca f să fie funcție impară.

25 ☆ **Portofoliu.** Arată că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $a, b \geq 0$, are loc:
$$a < b \iff a^n < b^n.$$
Ce condiție trebuie impusă asupra lui n dacă $a, b \in \mathbb{R}$?

Lecția L5.2

Radicali. Operații. Funcția radical

Amintește-ți!

La gimnaziu ai învățat noțiunea de *rădăcină pătrată*: $\sqrt{a}$ (cu $a \geq 0$) este numărul ≥ 0 al cărui pătrat este a. Exemple: $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, $\sqrt{0} = 0$.

1 Calculează:

a) $\sqrt{16}, \sqrt{49}, \sqrt{144}$;

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}, \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$;

c) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$.

2 Discută cu colegul: cum am putea generaliza ideea de rădăcină pătrată la rădăcina cubică, rădăcina de ordin 4 etc.?

Observă și descoperă!

Pentru numere nenegative, ridicarea la pătrat și extragerea rădăcinii pătrate sunt operații *inverse*: dacă pornești de la 5, ridici la pătrat și obții 25, apoi extragi rădăcina pătrată și revii la 5. La fel pentru cub și rădăcina cubică, de data aceasta pentru orice număr real.

3 Completează tabelul (pentru numere nenegative):

x	0	1	4	9	16
x^2					
$\sqrt{x}$					

4 Calculează $\sqrt[3]{8}$ și $\sqrt[3]{-8}$. Putem calcula $\sqrt{-16}$? Dar $\sqrt[4]{-16}$? Discută cu colegul: când are sens un radical?

★ Important!

Definiția radicalului (la nivel intuitiv). Pentru $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, definim radicalul de ordinul n astfel:

- Dacă n **este par** (de exemplu, $n = 2, 4, 6, \ldots$):

$$\sqrt[n]{a}, \quad a \geq 0$$

este numărul $b \geq 0$ pentru care $b^n = a$. Deci radicalul de ordin par se definește *doar pentru numere* ≥ 0.

- Dacă n **este impar** (de exemplu, $n = 3,5,7,\ldots$):

$$\sqrt[n]{a}, \quad a \in \mathbb{R}$$

este numărul $b \in \mathbb{R}$ pentru care $b^n = a$. Pentru radical de ordin impar, a poate fi pozitiv, negativ sau zero.

Justificarea existenței și a unicității. Funcția putere $f(x) = x^n$ este, după L5.1:

- pentru n impar: bijectivă $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow$ orice $a \in \mathbb{R}$ are exact un număr real b cu $b^n = a$;
- pentru n par: bijectivă $[0,+\infty) \to [0,+\infty) \Rightarrow$ orice $a \geq 0$ are exact un $b \geq 0$ cu $b^n = a$.

Funcția radical este, prin definiție, *inversa funcției putere*. Mai precis:

- Pentru n par, $n \geq 2$: funcția $\sqrt[n]{\cdot} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ este inversa restricției la $[0,+\infty)$ a funcției $x \mapsto x^n$.
- Pentru n impar, $n \geq 3$: funcția $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este inversa funcției $x \mapsto x^n$.

Notație. Pentru $n = 2$ scriem $\sqrt{a}$ în loc de $\sqrt[2]{a}$. Pentru $n = 3$ scriem $\sqrt[3]{a}$.

★ Important!

Proprietățile radicalilor. Acestea se obțin prin transferul (prin inversare) al proprietăților funcției putere. Pentru $m,n \in \mathbb{N}$, $m,n \geq 2$, și $a,b \geq 0$ (sau $a,b \in \mathbb{R}$ când toți radicalii care apar sunt de ordin impar):

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$ și $\sqrt[n]{a^n} = a$ (pentru $a \geq 0$ în cazul n par; pentru $a \in \mathbb{R}$ și n par, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$).
2. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
3. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (cu $b > 0$).
4. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.
5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$.
6. $\sqrt[n]{a^{n \cdot k}} = a^k$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ (când $a \geq 0$ pentru n par).

Atenție la capcane!

- $\sqrt{x^2} = |x|$ (nu x!). Exemplu: $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$.
- $\sqrt[3]{x^3} = x$ (spre deosebire de pătrat, cubul păstrează semnul lui x, de aceea radicalul cubic îl „recuperează" exact pe x).
- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ în general! (Verifică pe $a = 9, b = 16$.)

★ **Important!**

Expresii conjugate. *Conjugata* unei expresii cu radical de ordin 2 se obține schimbând semnul dintre termeni. Exemple:

- conjugata lui $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ este $\sqrt{a}-\sqrt{b}$;
- conjugata lui $a+\sqrt{b}$ este $a-\sqrt{b}$;
- conjugata lui $\sqrt{a}-c$ este $\sqrt{a}+c$.

Utilitate (raționalizarea numitorului). Înmulțirea cu conjugata folosește identitatea $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$ pentru a elimina radicalul de la numitor:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b},\quad \text{pentru } a,b\geq 0,\ a\neq b.$$

Exemplu rezolvat. Raționalizează numitorul lui $\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$.

Soluție. Înmulțim cu conjugata $3+\sqrt{5}$:

$$\frac{2}{3-\sqrt{5}}=\frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\frac{2(3+\sqrt{5})}{9-5}=\frac{2(3+\sqrt{5})}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

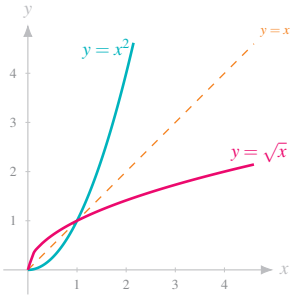
★ **Important!**

Proprietățile funcției radical $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $f(x)=\sqrt{x}$.
Aceste proprietăți se obțin prin oglindire (inversare) din proprietățile funcției $g(x)=x^2$ pe $[0,+\infty)$:

- f este *strict crescătoare* pe $[0,+\infty)$ (deoarece g este strict crescătoare pe $[0,+\infty)$);
- f este *bijectivă* de la $[0,+\infty)$ la $[0,+\infty)$ (oglindire a lui g);
- graficul lui f este *simetricul* graficului lui g față de prima bisectoare $y=x$ (oglindire grafică);
- $f(0)=0$ (intersecția cu axele este originea).

Funcția radical de ordin 3: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

- *strict crescătoare* pe $\mathbb{R}$;
- *impară* ($\sqrt[3]{-x}=-\sqrt[3]{x}$);
- *bijectivă* de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$;
- graficul este simetricul graficului funcției $x\mapsto x^3$ față de dreapta $y=x$.



Bine de știut!

Cum citesc graficul funcției radical? Două observații:

- Graficul funcției $f(x)=\sqrt{x}$ pornește din origine și urcă lent (pentru $x>1$, mai lent decât dreapta $y=x$).
- Dacă oglindești graficul $y=\sqrt{x}$ față de prima bisectoare, obții ramura parabolei $y=x^2$ corespunzătoare lui $x\geq 0$.

Exersează!

Operații cu radicali

5 Calculează (fără calculator):

a) $\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{48}$;

b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$;

c) $\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}$;

d) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$.

Model de rezolvare a): $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$, $\sqrt{48}=4\sqrt{3}$. Suma: $2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-4\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

6 Adu la o formă mai simplă (scoate factori de sub radical):

a) $\sqrt{72}$;

b) $\sqrt{125}$;

c) $\sqrt[3]{40}$;

d) $\sqrt{20a^2}$ (unde $a>0$).

Raționalizare

7 Raționalizează numitorul:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

b) $\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$;

c) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$;

d) $\dfrac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1}$.

8 Compară următoarele numere reale:

a) $\sqrt{12}$ și 3;

b) $3\sqrt{2}$ și $2\sqrt{5}$;

c) $5\sqrt{3}$ și $3\sqrt{8}$;

d) $\sqrt[3]{20}$ și $\sqrt[3]{27}$.

9 Calculează, folosind proprietățile radicalilor:

a) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{8}$;
c) $\sqrt{48}+\sqrt{75}-\sqrt{147}$;
b) $2\sqrt{12}-3\sqrt{27}+\sqrt{75}$;
d) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{128}$.

10 Simplifică expresiile:

a) $\sqrt{x^2}$, unde $x\in\mathbb{R}$;
c) $\sqrt[3]{x^3}$, unde $x\in\mathbb{R}$;
b) $\sqrt{(x-3)^2}$, unde $x\in\mathbb{R}$;
d) $\sqrt[4]{x^4}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

11 Stabilește domeniul maxim de definiție al fiecărei funcții:

a) $f(x)=\sqrt{x-2}$;
c) $h(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$;
b) $g(x)=\sqrt{5-2x}$;
d) $p(x)=\sqrt{-x^2+4x+5}$.

12 Raționalizează numitorul fiecărei expresii:

a) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$;
c) $\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$;
b) $\dfrac{3}{2+\sqrt{5}}$;
d) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$.

13 Calculează sumele:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{10}}$;
c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$;
b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{12}}$;
d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{15}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.

Funcția radical

14 Determină domeniul maxim de definiție al funcțiilor:

a) $f(x)=\sqrt{x-3}$;
c) $h(x)=\sqrt[3]{x-1}$;
b) $g(x)=\sqrt{4-x^2}$;
d) $k(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$.

Indicație b): Se impune condiția $4-x^2\geq 0 \iff x^2\leq 4 \iff x\in[-2,2]$.

15 Pentru $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $f(x)=\sqrt{x}$, și $g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $g(x)=x^2$:

a) Calculează $(g\circ f)(x)$ și $(f\circ g)(x)$.

b) Ce observi? Justifică folosind faptul că f și g sunt inverse.

16 Studiază monotonia următoarelor funcții pe domeniul lor maxim de definiție:

a) $f(x)=\sqrt{x-1}$;
c) $h(x)=\sqrt{5-x}$;
b) $g(x)=\sqrt{2x+3}$;
d) $p(x)=\sqrt{-2x+7}$.

17 Determină numerele reale a,b,c astfel încât

$$ax^2+bx+c=(x-2)^2 \quad \text{pentru orice } x\in\mathbb{R}.$$

Pentru aceste valori se consideră funcția

$$f:[2,+\infty)\to[0,+\infty),\qquad f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}.$$

a) Scrie explicit funcția f.

b) Arată că f este strict crescătoare pe $[2,+\infty)$.

c) Arată că f este injectivă.

d) Arată că f este surjectivă pe $[0,+\infty)$.

18 ☆ **Portofoliu.** Arată că, pentru orice $a,b\geq 0$:

$$\sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

(Indicație: ridică ambii membri la pătrat. De ce se păstrează sensul inegalității? De ce este adevărată inegalitatea obținută?)

Lecția L5.3

Ecuații și inecuații cu radicali

Amintește-ți!

La rezolvarea ecuațiilor obișnuite, folosești transformări *echivalente* — adică transformări care nu schimbă mulțimea soluțiilor. De exemplu, în ecuația $x+3=7$ poți scădea 3 din ambii membri și obții $x=4$. Transformarea „scădem 3” este echivalentă: nu se pierd soluții și nici nu apar soluții noi.

1. Discută cu colegul: dacă pornesc de la $\sqrt{x}=5$ și ridic ambii membri la pătrat, obțin $x=25$. Dar dacă pornesc de la $\sqrt{x}=-5$ și ridic la pătrat? Unde este problema?
2. Arată că ecuația $\sqrt{x}=-5$ *nu* are soluții reale.

Observă și descoperă!

Andrei rezolvă ecuația $\sqrt{x+1}=x-1$. El ridică direct ambii membri la pătrat:

$$x+1=(x-1)^2 \iff x+1=x^2-2x+1 \iff x^2-3x=0 \iff x(x-3)=0,$$

deci $x_1=0$ sau $x_2=3$.

3. Verifică ambele valori obținute în ecuația *inițială*. Care dintre ele verifică ecuația? Care nu?
4. Discută cu colegul: ce s-a întâmplat? De ce ridicarea la pătrat a generat o „soluție falsă”? Ce condiție ar trebui să adăugăm pentru a evita acest lucru?

★ Important!

Echivalențe fundamentale pentru ecuațiile cu radicali.

1. Radical de ordin par (forma $\sqrt{f(x)}=g(x)$).

$$\boxed{\sqrt{f(x)}=g(x) \iff f(x)=g(x)^2 \text{ și } g(x)\geq 0.}$$

De ce? Dacă $\sqrt{f(x)}=g(x)$, atunci $g(x)\geq 0$ (un radical de ordin par este, prin definiție, ≥ 0). În plus, prin ridicarea la pătrat, $f(x)=g(x)^2$. Reciproca este clară.
Atenție. Condiția $g(x)\geq 0$ nu este automată — trebuie verificată separat! Iar condiția implicită $f(x)\geq 0$ este conținută în $f(x)=g(x)^2$.

2. Radical de ordin impar (forma $\sqrt[3]{f(x)}=g(x)$).

$$\boxed{\sqrt[3]{f(x)}=g(x) \iff f(x)=g(x)^3.}$$

De ce? Funcția $x \mapsto x^3$ este bijectivă pe $\mathbb{R}$, deci ridicarea la cub este o operație echivalentă (nu produce soluții false și nu pierde soluții). Aici nu este necesară nicio condiție suplimentară pentru $g(x)$.

3. Egalitate între doi radicali de ordin par (forma $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$).

$$\boxed{\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \iff f(x) = g(x) \text{ și } f(x), g(x) \geq 0.}$$

De ce? Dacă cei doi radicali există, atunci $f(x), g(x) \geq 0$. Prin ridicarea la pătrat, $f(x) = g(x)$. Reciproc, dacă $f(x) = g(x) \geq 0$, atunci ambii radicali există și sunt egali.

Schemă generală de rezolvare.

1. Stabilește *condiția de existență* (CE): toți radicalii de ordin par cer ca expresia de sub radical să fie ≥ 0.
2. Aplică echivalența potrivită (cu condițiile suplimentare necesare!).
3. Rezolvă ecuația obținută.
4. *Verifică* fiecare soluție în ecuația inițială (mai ales dacă ai folosit ridicarea la o putere pară).

★ **Important!**

Exemplu rezolvat 1. Rezolvă $\sqrt{2x+3} = x$.
Soluție. Aplicăm echivalența:

$$\sqrt{2x+3} = x \iff 2x+3 = x^2 \text{ și } x \geq 0.$$

Din $x^2 - 2x - 3 = 0$: $\Delta = 4 + 12 = 16$, $x_{1,2} = (2 \pm 4)/2$, deci $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Condiția $x \geq 0$ elimină $x_1 = -1$. Soluția: $x = 3$. (Verificare: $\sqrt{2 \cdot 3 + 3} = \sqrt{9} = 3$. ✓)

Exemplu rezolvat 2. Rezolvă $\sqrt{x+5} = \sqrt{2x-1}$.
Soluție. Aplicăm echivalența:

$$\sqrt{x+5} = \sqrt{2x-1} \iff x+5 = 2x-1 \text{ și } x+5 \geq 0,\ 2x-1 \geq 0.$$

Din $x + 5 = 2x - 1$ obținem $x = 6$. Condițiile: $6 + 5 = 11 \geq 0$ ✓, $2 \cdot 6 - 1 = 11 \geq 0$ ✓. Soluția: $x = 6$.

Exemplu rezolvat 3. Rezolvă $\sqrt[3]{x^3 - 7} = x - 1$.
Soluție. Aplicăm echivalența:

$$\sqrt[3]{x^3 - 7} = x - 1 \iff x^3 - 7 = (x-1)^3.$$

Dezvoltăm: $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Ecuația devine $x^3 - 7 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \iff 3x^2 - 3x - 6 = 0 \iff x^2 - x - 2 = 0$. $\Delta = 1 + 8 = 9$, $x_{1,2} = (1 \pm 3)/2$, deci $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. (Aici nu mai e nevoie de verificare suplimentară: ridicarea la cub este o transformare echivalentă.)

★ Important!

Inecuații cu radicali. Echivalențele sunt mai delicate decât pentru ecuații. Cazurile cele mai frecvente:

$\sqrt{f(x)} \geq g(x)$**:**

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \text{ sau } [g(x) \geq 0 \text{ și } f(x) \geq g(x)^2]. \end{cases}$$

(Disjuncția „sau” apare pentru că, dacă $g(x) < 0$, inegalitatea este *automat* verificată — radicalul este $\geq 0 > g(x)$.)

$\sqrt{f(x)} \leq g(x)$**:**

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \iff f(x) \geq 0 \text{ și } g(x) \geq 0 \text{ și } f(x) \leq g(x)^2.$$

(Toate condițiile sunt simultan necesare — este o conjuncție „și”.)

Exemplu. Rezolvă $\sqrt{x+1} \leq 2$.
Soluție. CE: $x+1 \geq 0 \iff x \geq -1$. Aplicăm echivalența: $\sqrt{x+1} \leq 2 \iff x+1 \leq 4 \iff x \leq 3$ (condiția $g(x) = 2 \geq 0$ este verificată automat). Combinând cu CE, obținem $-1 \leq x \leq 3$, deci $x \in [-1, 3]$.

Bine de știut!

Capcane frecvente.

- Niciodată să nu uiți să verifici condițiile suplimentare ($g(x) \geq 0$ pentru $\sqrt{f(x)} = g(x)$).
- Pentru radicalul de ordin impar nu există condiții de existență, iar ridicarea la o putere impară este o transformare echivalentă.
- La inecuații, atenție la diferența dintre conjuncția „și” și disjuncția „sau” (revezi lecția L1.1).
- Întotdeauna verifică soluțiile finale în ecuația inițială, pentru a evita „soluțiile false”.

Exersează!

Ecuații cu radicali

5 Rezolvă în $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{x+7} = 5$;
b) $\sqrt{2x-1} = x-2$;
c) $\sqrt{x^2-4} = x-2$;
d) $\sqrt[3]{x+8} = 2$.

Model de rezolvare a): CE: $x+7 \geq 0 \iff x \geq -7$. Aplicăm echivalența: $\sqrt{x+7} = 5 \iff x+7 = 25$ și $5 \geq 0$ (automat). Deci $x = 18$ ✓.

6 Rezolvă $\sqrt{2x+3} = \sqrt{x+5}$.

7 Rezolvă $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-4} = 5$. (Indicație: izolează un radical, apoi ridică la pătrat. Vei avea încă un

radical, repetă procedeul.)

Ecuații și inecuații cu radicali

8 Rezolvă în $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{x-1} \leq 3$;

b) $\sqrt{x+4} > 2$;

c) $\sqrt{x^2-9} \leq 4$.

9 Rezolvă în $\mathbb{R}$ următoarele ecuații:

a) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{7+2x}$;

b) $\sqrt{9x-4} = \sqrt{3+2x}$;

c) $\sqrt{x^2-4x+7} = \sqrt{2x+3}$;

d) $\sqrt{-x^2+6x+1} = \sqrt{x+5}$.

10 Rezolvă în $\mathbb{R}$ următoarele ecuații:

a) $\sqrt{2x^2-x+6} = \sqrt{5x+1}$;

b) $\sqrt{x^2+4x+3} = \sqrt{-x^2+2x+1}$;

c) $\sqrt{3x^2-2x+1} = \sqrt{x^2+6x-3}$;

d) $\sqrt{-x^2+5x+6} = \sqrt{2x^2-7x+4}$.

11 Rezolvă în $\mathbb{R}$ următoarele ecuații:

a) $\sqrt{x+4} = x-2$;

b) $\sqrt{2x-1} = x-1$;

c) $\sqrt{x^2-3x+2} = x-2$;

d) $\sqrt{x^2+2x+5} = x+1$.

12 Rezolvă în $\mathbb{R}$ următoarele ecuații:

a) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5$;

b) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 4$;

c) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-1} = 2$;

d) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2$.

13 Rezolvă în $\mathbb{R}$ următoarele ecuații cu radicali de ordin impar:

a) $\sqrt[3]{x^3+7} = x+1$;

b) $\sqrt[3]{1-3x} = 1-x$;

c) $\sqrt[3]{x^3+3x^2} = x+1$;

d) $\sqrt[3]{x+6} = x$.

Indicație pentru d): scrie $x^3 - x - 6 = (x^3-8) - (x-2)$ și descompune în factori.

14 Rezolvă în $\mathbb{R}$ următoarele inecuații:

a) $\sqrt{x+3} \leq \sqrt{2x^2+5x+4}$;

b) $\sqrt{3x-1} \leq \sqrt{x^2+4x+2}$;

c) $\sqrt{x^2-3x+4} \geq \sqrt{2x^2-7x+3}$;

d) $\sqrt{-x^2+6x+7} \leq \sqrt{2x+1}$.

15 Rezolvă în $\mathbb{R}$ următoarele inecuații:

a) $\sqrt{x+1} \leq 3$;

b) $\sqrt{2x-5} > x-3$;

c) $\sqrt{x^2-4x+5} \geq 2$;

d) $\sqrt{-x^2+5x+6} < 3$.

16 Stabilește condițiile de existență, apoi rezolvă ecuațiile:

a) $\sqrt{x^2-5x+6}=0$;

b) $\sqrt{-x^2+4x+5}=0$;

c) $\sqrt{x^2-2x-8}=x-4$;

d) $\sqrt{-2x^2+7x+4}=x$.

17 Determină valorile reale ale lui x pentru care:

a) $\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{(x+1)(x+2)}+\cdots+\sqrt{(x+10)(x+11)}=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{11\cdot 12}$, unde $x\geq 0$;

b) $\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{(x+1)(x+2)}+\sqrt{(x+2)(x+3)}=\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{12}$, unde $x\geq 0$;

c) $\sqrt{x^2+2x+1}=x+1$;

d) $\sqrt{x^2-4x+4}=2-x$.

Aplicație practică

18 Distanța de frânare D a unei mașini (în metri) depinde de viteza v (în km/h) prin formula aproximativă $D=\dfrac{v^2}{170}$. Inversa acestei formule, care exprimă viteza în funcție de distanța de frânare, este $v=\sqrt{170D}$.

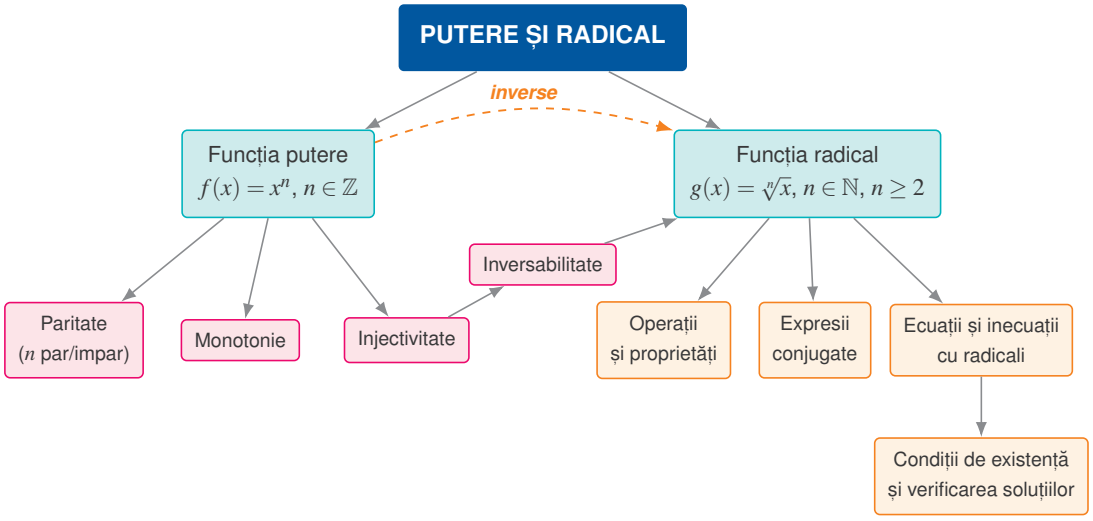
a) Care este viteza unei mașini a cărei distanță de frânare este de 40 m? (Aproximare la o zecimală.)

b) Pentru ce viteze distanța de frânare depășește 50 m? (Folosește inecuația $D>50$, deci $v^2>8\,500$.)

19 ☆ **Portofoliu.** Rezolvă $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=1$.

Recapitulare

Hartă conceptuală



De reținut!

La finalul acestei unități trebuie să poți:

- identifica proprietățile funcției putere $f(x)=x^n$ pentru n întreg (paritate, monotonie, injectivitate), distingând cazul n par de cazul n impar;
- demonstra prin calcul algebric monotonia și injectivitatea funcției putere pe domeniile potrivite;
- recunoaște funcția radical $\sqrt[n]{x}$ ca inversă a funcției putere și interpreta simetria graficelor față de prima bisectoare;
- efectua operații cu radicali: scoaterea factorilor de sub radical, înmulțirea și împărțirea radicalilor, raționalizarea cu expresii conjugate;
- aplica proprietățile radicalilor pentru a simplifica și a evalua expresii;
- determina domeniul maxim de definiție al unei funcții radical din condiția de existență;
- rezolva ecuații cu radicali aplicând echivalențele corecte și verificând soluțiile în ecuația inițială;
- rezolva inecuații cu radicali ținând cont de condițiile de existență și de semnul membrilor.

Sarcini de sinteză

Exersează!

1 Pentru funcția putere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4$:

a) Studiază paritatea funcției.

b) Arată că f este strict descrescătoare pe $(-\infty,0]$ și strict crescătoare pe $[0,+\infty)$.

c) Este f injectivă pe $\mathbb{R}$? Dar pe $[0,+\infty)$? Justifică.

2 Pentru funcția putere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$:

a) Studiază paritatea funcției.

b) Demonstrează, prin calcul algebric, că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Dedu că f este injectivă. Care este inversa ei?

3 Calculează:

a) $\sqrt{50}-\sqrt{18}+\sqrt{8}$;

b) $3\sqrt{12}-2\sqrt{27}+\sqrt{75}$;

c) $\dfrac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ (raționalizează numitorul).

4 (*Sume telescopice*) Calculează, folosind raționalizarea fiecărui termen:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2026}+\sqrt{2025}}.$$

Indicație: $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$.

5 Rezolvă în $\mathbb{R}$, punând de fiecare dată **condițiile de existență** și **verificând soluțiile**:

a) $\sqrt{2x-3}=\sqrt{x+5}$;

b) $\sqrt{x+4}=x-2$;

c) $\sqrt{x+1}\le 3$;

d) $\sqrt{x^2-4x+5}\ge 2$.

6 (*Echivalențe cu radicali*) Rezolvă în $\mathbb{R}$, folosind echivalențele specifice:

a) $\sqrt{x^2-4}=x-2$ (echivalent cu $x^2-4=(x-2)^2$ **și** $x-2\ge 0$);

b) $\sqrt{x+7}=\sqrt{2x-1}$ (echivalent cu $x+7=2x-1$ **și** $x+7\ge 0$, $2x-1\ge 0$).

7 Adu la o formă mai simplă următoarele expresii:

a) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$;

b) $\sqrt{10+2\sqrt{21}}+\sqrt{10-2\sqrt{21}}$;

c) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

Indicație. Pentru radicalii dubli putem folosi formulele (valabile pentru $a>0$, $b\geq 0$ și $a^2-b\geq 0$):

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

8 Calculează, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$:

$$\sqrt[n]{2^1\cdot 2^2\cdot 2^3\cdots 2^n}\cdot\sqrt[n]{3^1\cdot 3^2\cdot 3^3\cdots 3^n}.$$

9 Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Calculează:

$$\sqrt[n]{5^1\cdot 5^3\cdot 5^5\cdots 5^{2n-1}}.$$

10 Compară numerele:

a) $\sqrt[n]{2^2\cdot 2^4\cdot 2^6\cdots 2^{2n}}$ și $\sqrt[n]{2^1\cdot 2^3\cdot 2^5\cdots 2^{2n-1}}$, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$;

b) $\sqrt[6]{3^2\cdot 3^4\cdot 3^6}$ și 3^2.

11 Determină domeniul maxim de definiție al funcției

$$f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}+\sqrt{-x^2+9x-14}.$$

12 Determină domeniul maxim de definiție al funcției

$$g(x)=\frac{\sqrt{-x^2+4x+5}}{\sqrt{x^2-2x-3}}.$$

13 Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\sqrt{x+6}=x$;

b) $\sqrt{3x+4}=x+2$;

c) $\sqrt{x^2-6x+9}=3-x$.

14 Rezolvă în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $\sqrt{3x-2}\leq x$;

b) $\sqrt{x^2-4x+5}\leq 3$;

c) $\sqrt{-x^2+8x-12}>1$.

15 Determină toate valorile reale ale lui x pentru care

$$\sqrt{x^2-4x+8}+\sqrt{x^2-4x+13}\leq 5.$$

16 Se consideră funcția

$$f:[-1,+\infty)\to[0,+\infty),\qquad f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}.$$

a) Scrie funcția sub o formă mai simplă.

b) Determină imaginea funcției.

c) Stabilește dacă funcția este bijectivă.

17 Se consideră funcția

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x-5}.$$

a) Determină domeniul maxim de definiție al funcției și scrie expresia de sub radical în formă canonică.

b) Rezolvă ecuația $f(x)=0$ și inecuația $f(x)\leq 4$.

c) Precizează intervalele de monotonie ale funcției pe domeniul ei de definiție.

18 Pentru fiecare funcție, precizează domeniul de definiție, paritatea și intervalele de monotonie:

$$f(x)=x^{-2},\qquad g(x)=x^{-3}.$$

19 Se consideră funcția

$$h:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\qquad h(x)=x^{-1}.$$

a) Arată că h este funcție impară.

b) Determină $h(h(x))$.

c) Stabilește dacă funcția h este bijectivă.

20 Rezolvă în $\mathbb{R}$ ecuația

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5.$$

21 ☆ **Portofoliu.** Demonstrează că, pentru orice $a,b,c>0$, are loc inegalitatea

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

Indicație: ridică la pătrat ambii membri (ambii fiind pozitivi) și folosește

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0.$$

Evaluare — U5

45 de minute · 90 p + 10 p din oficiu

Subiectul I (25 de puncte)

1. **(5 p)** Domeniul maxim de definiție al funcției $f(x)=\sqrt{x-3}$ este:

☐ $\mathbb{R}$ ☐ $[3,+\infty)$ ☐ $(-\infty,3]$ ☐ $(3,+\infty)$

2. **(5 p)** Funcția putere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4$, este:

☐ impară ☐ pară ☐ strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ ☐ injectivă pe $\mathbb{R}$

3. **(5 p)** Rezultatul calculului $\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{75}$ este:

☐ 0 ☐ $\sqrt{3}$ ☐ $2\sqrt{3}$ ☐ $10\sqrt{3}$

4. **(10 p)** Asociază fiecare funcție din coloana A cu proprietatea ei din coloana B.

A (funcția)	B (proprietate)
1) $f(x)=x^2$, $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	a) impară, strict crescătoare pe $\mathbb{R}$
2) $f(x)=x^3$, $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	b) pară, neinjectivă pe $\mathbb{R}$
3) $f(x)=\sqrt{x}$, $[0,\infty)\to[0,\infty)$	c) inversa funcției x^2 pe $[0,\infty)$

Subiectul II (30 de puncte)

5. **(15 p)** Calculează (fără calculator) și completează:

$\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{8}=$ _____

După raționalizarea numitorului: $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}=$ _____

Domeniul maxim de definiție al funcției $f(x)=\sqrt{2x-6}$: _____

6. **(15 p)** Rezolvă ecuația $\sqrt{3x+4}=x$, $x\in\mathbb{R}$.

Condițiile (existența radicalului și semnul membrului drept): _____

După ridicare la pătrat se obține ecuația: _____

Soluția (după verificare): $x=$ _____

Subiectul III (35 de puncte)

7. **(20 p)** Se consideră funcția

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}.$$

a) Determină domeniul maxim de definiție (condiția de existență $x^2 - 4x + 3 \geq 0$).

b) Scrie expresia de sub radical în formă canonică.

c) Rezolvă ecuația $f(x) = 0$.

d) Rezolvă inecuația $f(x) \leq 2$.

Vor fi notate distinct:

- determinarea domeniului ..... 5 puncte;
- forma canonică ..... 5 puncte;
- rezolvarea ecuației $f(x) = 0$ ..... 5 puncte;
- rezolvarea inecuației $f(x) \leq 2$ ..... 5 puncte.

8. **(15 p)** Distanța de frânare D a unei mașini (în metri) depinde de viteza v (în km/h) prin formula aproximativă $D = \dfrac{v^2}{170}$.

a) Exprimă viteza v în funcție de distanța de frânare D (inversarea formulei). Ce condiție de existență apare?

b) Care este viteza unei mașini a cărei distanță de frânare este de 30 m? (Aproximare la o zecimală.)

c) Pentru ce viteze distanța de frânare depășește 60 m? (Rezolvă inecuația $\dfrac{v^2}{170} > 60$, $v > 0$.)

Vor fi notate distinct:

- inversarea formulei și condiția de existență ..... 5 puncte;
- calculul vitezei pentru $D = 30$ ..... 5 puncte;
- rezolvarea inecuației ..... 5 puncte.

Notă: 10 puncte se acordă din oficiu. Total: 100 de puncte. Timp de lucru: 45 de minute.

Exersezi, corectezi, progresezi

Pentru fiecare dintre cele două probleme de la subiectul III, ai aici sarcini pe trei niveluri: **Ameliorare**, **Echivalent** și **Dezvoltare**. În funcție de rezultatul obținut la test, începe cu nivelul potrivit și continuă cu următoarele.

Pentru subiectul III, itemul 7 (funcția radical)

Ameliorare

Pas cu pas, refă rezolvarea.

1. Pentru a determina domeniul maxim de definiție al funcției $f(x)=\sqrt{x-1}$, rezolvă inecuația $x-1\geq 0$ (condiția de existență). Scrie domeniul ca interval.
2. Pentru $g(x)=\sqrt{x^2-9}$, scrie condiția de existență $x^2-9\geq 0$, descompune $x^2-9=(x-3)(x+3)$ și determină domeniul.
3. Rezolvă ecuația $\sqrt{x-1}=0$ și apoi inecuația $\sqrt{x-1}\leq 2$ (nu uita: $\sqrt{x-1}\leq 2 \Leftrightarrow 0\leq x-1\leq 4$).

Echivalent

Se consideră funcția

$$f(x)=\sqrt{x^2-6x+5}.$$

a) Determină domeniul maxim de definiție (condiția de existență).

b) Scrie expresia de sub radical în formă canonică.

c) Rezolvă ecuația $f(x)=0$.

d) Rezolvă inecuația $f(x)\leq 2$.

Dezvoltare

Funcția radical și inversa ei. Fie $f:[2,+\infty)\to[0,+\infty)$, $f(x)=\sqrt{x-2}$.

a) Arată că f este strict crescătoare pe domeniul ei.

b) Dedu că f este injectivă.

c) Arată că f este surjectivă pe $[0,+\infty)$.

d) Determină inversa $f^{-1}:[0,+\infty)\to[2,+\infty)$. Ce tip de funcție este?

e) Cum sunt așezate graficele lui f și f^{-1} unul față de celălalt?

Pentru subiectul III, itemul 8 (modelare cu funcția radical)

Ameliorare

Recunoaște formula, inversează-o, calculează.

1. Aria unui pătrat este $A = l^2$, unde l este lungimea laturii.
   a) Exprimă latura l în funcție de aria A. Ce condiție trebuie să îndeplinească A?
   b) Calculează latura unui pătrat cu aria $A = 49$ cm^2.
   c) Calculează latura unui pătrat cu aria $A = 20$ cm^2 (aproximare la o zecimală).
2. Pentru ce arii latura pătratului depășește 5 cm? (Rezolvă $\sqrt{A} > 5$, $A \geq 0$.)

Echivalent

Timpul de cădere liberă t (în secunde) al unui obiect lăsat să cadă de la înălțimea h (în metri) este aproximativ $t = \sqrt{\frac{h}{5}}$.

a) Ce condiție de existență trebuie pusă pentru h?
b) Cât timp cade un obiect lăsat de la 20 m?
c) De la ce înălțime trebuie lăsat un obiect ca să cadă 3 secunde? (Inversează formula: $h = 5t^2$.)
d) Pentru ce înălțimi timpul de cădere depășește 2 secunde?

Dezvoltare

Distanța la orizont. Distanța d (în km) până la care se vede orizontul de la înălțimea h (în metri) deasupra solului este aproximativ $d = \sqrt{13h}$.

a) Ce condiție de existență apare pentru h?
b) De la o terasă aflată la $h = 9$ m, până la ce distanță se vede orizontul?
c) De la ce înălțime orizontul se vede până la 26 km? (Inversează formula.)
d) Pentru ce înălțimi distanța la orizont depășește 52 km? (Rezolvă inecuația cu radical, punând condiția de existență.)
e) Dacă înălțimea se dublează, cu ce factor se înmulțește distanța la orizont? Justifică folosind formula.

Autoevaluare

Bifează enunțurile care descriu ce poți face singur, fără ajutor:

- ☐ Cunosc proprietățile funcției putere $f(x) = x^n$ pentru n par și pentru n impar (paritate, monotonie, injectivitate).
- ☐ Pot demonstra prin calcul algebric monotonia funcției putere pe domeniile potrivite.
- ☐ Pot demonstra injectivitatea funcției putere și știu pe ce domeniu este injectivă funcția x^n cu n par.
- ☐ Înțeleg că funcția radical $\sqrt[n]{x}$ este inversa funcției putere și că graficele lor sunt simetrice față de prima bisectoare.
- ☐ Pot scoate factori de sub radical și pot reduce radicali asemenea.
- ☐ Pot raționaliza un numitor folosind expresii conjugate.
- ☐ Pot determina domeniul maxim de definiție al unei funcții radical din condiția de existență.
- ☐ Pun întotdeauna condițiile de existență înainte de a rezolva o ecuație sau o inecuație cu radicali.
- ☐ Aplic corect echivalențele pentru ecuații cu radicali (ridicarea la pătrat cu condiția de semn a membrului drept).
- ☐ Rezolv inecuații cu radicali ținând cont de condiția de existență și de semnul membrilor.
- ☐ Verific întotdeauna soluțiile finale în ecuația inițială, pentru a elimina „soluțiile false”.
- ☐ Pot modela și rezolva o situație practică folosind funcția radical (inversarea unei formule pătratice).

Cum interpretezi rezultatul?

- Dacă ai bifat **10–12 enunțuri**: stăpânești conținutul unității. Treci cu încredere la U6 (Trigonometrie) și încearcă sarcinile cu ☆ din lecțiile parcurse.
- Dacă ai bifat **7–9 enunțuri**: ești pe drumul cel bun. Reia sarcinile de tip „Echivalent” din secțiunea „Exersezi, corectezi, progresezi” înainte de a începe U6.
- Dacă ai bifat **0–6 enunțuri**: solicită sprijinul profesorului. Reia sarcinile de tip „Ameliorare” din secțiunea „Exersezi, corectezi, progresezi” împreună cu un coleg cu care lucrezi bine.

Reflectează:

- Cum explici, în cuvintele tale, faptul că ridicarea la putere și extragerea radicalului sunt operații inverse? De ce funcția x^n cu n par trebuie restrânsă la $[0, +\infty)$ pentru a fi inversabilă?
- De ce este obligatoriu să pui condițiile de existență înainte de a rezolva o ecuație cu radicali? Dă un exemplu în care ridicarea la pătrat introduce o soluție falsă.
- Care a fost cea mai utilă tehnică din această unitate: scoaterea factorilor de sub radical, raționalizarea cu expresii conjugate sau verificarea soluțiilor? De ce?

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE

U6

Funcții trigonometrice. Ecuații trigonometrice

Trigonometria este o limbă a măsurătorilor indirecte: cu un sextant și o tabelă de sinusuri, marinarii au străbătut oceanele înainte ca GPS-ul să existe.

Lecțiile unității

- L6.1 — Cercul trigonometric. Funcțiile sin și cos pe $[0, 2\pi]$
- L6.2 — Funcțiile sin, cos, tg, ctg pe $\mathbb{R}$. Periodicitate
- L6.3 — Relații între funcțiile trigonometrice
- L6.4 — Formule pentru suma și diferența a două numere reale
- L6.5 — Transformarea sumelor în produse și a produselor în sume
- L6.6 — Funcții trigonometrice inverse
- L6.7 — Ecuații trigonometrice
- Recapitulare · Evaluare · Exersezi, corectezi, progresezi · Autoevaluare

Ce vei învăța

- să identifici pe cercul trigonometric punctele asociate numerelor reale;
- să calculezi valorile funcțiilor trigonometrice prin reducere la primul cadran;
- să afli valoarea unei funcții trigonometrice când cunoști valoarea alteia;
- să demonstrezi identități trigonometrice;
- să citești pe grafic proprietățile funcțiilor trigonometrice;
- să rezolvi ecuații trigonometrice și să descrii fenomene periodice.



Lecția L6.1

Cercul trigonometric. Funcțiile $\sin$ și $\cos$ pe $[0, 2\pi]$

Amintește-ți!

La gimnaziu ai învățat trigonometria în triunghiul dreptunghic: într-un triunghi ABC dreptunghic în C, dacă $\widehat{A} = \alpha$, atunci

$$\sin\alpha = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}} = \frac{BC}{AB}, \qquad \cos\alpha = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}} = \frac{AC}{AB}.$$

1. Calculează $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\sin 60^\circ$ folosind triunghiurile remarcabile.
2. Discută cu colegul: ce înseamnă $\sin 90^\circ$? Dar $\sin 0^\circ$? Cum am putea da un sens expresiilor $\sin 120^\circ$ sau $\sin 200^\circ$, care corespund unor unghiuri ce nu pot exista într-un triunghi dreptunghic?

Observă și descoperă!

Privește un ceas cu limbi. În fiecare moment, vârful minutarului se află într-un punct al unui cerc. Coordonatele acestui punct (abscisa și ordonata) se schimbă continuu în timp și pot fi descrise cu ajutorul funcțiilor sinus și cosinus.

3. Pe o foaie cu pătrățele, desenează un cerc cu raza 1 și centrul în origine. Marchează pe cerc:
   a) punctul A situat la 0° (pe semiaxa pozitivă Ox);
   b) punctul B situat la 90° (deasupra originii);
   c) punctul C situat la 180° (pe semiaxa negativă Ox);
   d) punctul D situat la 270° (sub origine).
4. Citește coordonatele (x, y) ale fiecărui punct.
5. Discută cu colegul: dacă ai parcurge a douăsprezecea parte din cerc (mergând în sens *trigonometric*, adică antiorar), unde te-ai afla? Ce coordonate ar avea acel punct?

★ Important!

Cercul trigonometric. Cercul cu centrul în origine și raza 1, parcurs în *sens trigonometric* (antiorar) începând din punctul $A(1,0)$, se numește *cerc trigonometric*.

Măsurarea unghiurilor.

- În *grade* (sistemul sexagesimal): un cerc complet $= 360^\circ$.

- În *radiani* (unitatea de măsură pe care o folosim în continuare): un cerc complet $= 2\pi$ rad.
- **Conversie:** π rad $= 180^\circ$, deci 1 rad $= \dfrac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}3^\circ$, iar $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ rad.

Tabel de conversie (puncte remarcabile).

Grade	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radiani	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

★ Important!

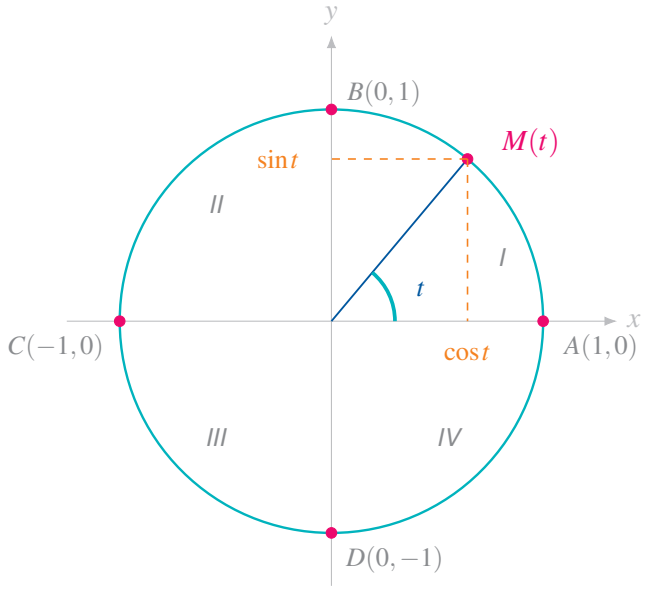
Definiția sinusului și a cosinusului pe $[0,2\pi]$. Fie $t \in [0,2\pi]$ un număr real. Asociem lui t punctul $M(t)$ pe cercul trigonometric, obținut pornind din $A(1,0)$ și parcurgând arcul de lungime t în sens antiorar. Coordonatele lui $M(t)$ în reperul cartezian sunt:

$$\boxed{M(t) = (\cos t, \sin t).}$$

Adică:

- $\cos t$ = abscisa (coordonata x) punctului $M(t)$;
- $\sin t$ = ordonata (coordonata y) punctului $M(t)$.

Atenție: aceasta este o *definiție* ce extinde noțiunea din triunghiul dreptunghic. Pentru $t \in (0,\pi/2)$ (deci când punctul $M(t)$ se află în cadranul I), noua definiție coincide cu cea din triunghiul dreptunghic.



★ **Important!**

Valorile lui sin **și** cos **în puncte remarcabile.**

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Formula fundamentală. Pentru orice $t \in [0, 2\pi]$:

$$\boxed{\sin^2 t + \cos^2 t = 1.}$$

Justificare: punctul $M(t) = (\cos t, \sin t)$ se află pe cercul de rază 1 centrat în origine, deci coordonatele lui verifică ecuația cercului $x^2 + y^2 = 1$.

Semnele lui sin **și** cos **pe cele patru cadrane.**

Cadran	I $(0, \pi/2)$	II $(\pi/2, \pi)$	III $(\pi, 3\pi/2)$	IV $(3\pi/2, 2\pi)$
$\sin t$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos t$	$+$	$-$	$-$	$+$

★ **Important!**

Reducerea la primul cadran. Pentru a calcula $\sin t$ sau $\cos t$ când t se află în cadranul II, III sau IV, folosim relații care „aduc" calculul în primul cadran.

Pentru $t \in [\pi/2, \pi]$ **(cadranul II):** fie $t' = \pi - t \in [0, \pi/2]$. Atunci $t = \pi - t'$ și:

$$\sin t = \sin(\pi - t') = \sin t', \qquad \cos t = \cos(\pi - t') = -\cos t'.$$

Pentru $t \in [\pi, 3\pi/2]$ **(cadranul III):** fie $t' = t - \pi \in [0, \pi/2]$. Atunci:

$$\sin t = \sin(\pi + t') = -\sin t', \qquad \cos t = \cos(\pi + t') = -\cos t'.$$

Pentru $t \in [3\pi/2, 2\pi]$ **(cadranul IV):** fie $t' = 2\pi - t \in [0, \pi/2]$. Atunci:

$$\sin t = \sin(2\pi - t') = -\sin t', \qquad \cos t = \cos(2\pi - t') = \cos t'.$$

Exemplu rezolvat. Calculează $\sin \frac{5\pi}{6}$.

Soluție. $\frac{5\pi}{6} \in (\pi/2, \pi)$ — cadranul II. Folosim $t' = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, deci:

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Aplicație digitală

Folosește **GeoGebra** sau **Desmos** pentru a explora cercul trigonometric.

- Desenează un cerc cu raza 1 centrat în origine.
- Adaugă un glisor (slider) pentru $t \in [0, 2\pi]$. Plasează un punct $M = (\cos(t), \sin(t))$ pe cerc.
- Mută t și observă cum se mișcă M. Citește coordonatele.
- Verifică valorile remarcabile ($t = \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ etc.) cu tabelul de mai sus.

Exersează!

Localizare pe cercul trigonometric

6 Pentru fiecare valoare a lui t, indică *cadranul* în care se află punctul $M(t)$:

a) $t = \dfrac{2\pi}{3}$; b) $t = \dfrac{7\pi}{6}$; c) $t = \dfrac{5\pi}{4}$; d) $t = \dfrac{11\pi}{6}$; e) $t = \dfrac{3\pi}{4}$.

7 Convertește din grade în radiani (sau invers):

a) $120°, 135°, 150°, 225°, 300°$; b) $\dfrac{5\pi}{6}$ rad, $\dfrac{7\pi}{4}$ rad, $\dfrac{4\pi}{3}$ rad.

Reducerea la primul cadran

8 Calculează, prin reducere la primul cadran, sinusul și cosinusul numerelor:

$$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$$

Model de rezolvare (pentru $2\pi/3$): $\dfrac{2\pi}{3} \in (\pi/2, \pi)$, deci punctul $M(2\pi/3)$ se află în cadranul II. $t' = \pi - 2\pi/3 = \pi/3$. $\sin(2\pi/3) = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, $\cos(2\pi/3) = -\cos(\pi/3) = -1/2$.

Folosirea formulei fundamentale

9 a) Știind că $\sin t = \dfrac{3}{5}$ și $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, calculează $\cos t$.

b) Știind că $\cos t = \dfrac{2}{3}$ și $t \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, calculează $\sin t$.

c) Știind că $\sin t = \dfrac{2}{3}$ și $t \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, calculează $\cos t$.

d) Știind că $\cos t = -\dfrac{1}{3}$ și $t \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, calculează $\sin t$.

Indicație a): din $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ rezultă $\cos^2 t = 1 - 9/25 = 16/25$, deci $\cos t = \pm 4/5$. Cum $t \in (0, \pi/2)$, punctul $M(t)$ se află în cadranul I, deci $\cos t > 0$ și $\cos t = 4/5$.

10 ☆ **Portofoliu.** Arată că funcțiile sin și cos sunt mărginite: pentru orice $t \in [0, 2\pi]$ avem $|\sin t| \leq 1$ și $|\cos t| \leq 1$.

Lecția L6.2

Funcțiile sin, cos, tg, ctg pe $\mathbb{R}$. Periodicitate

Amintește-ți!

În lecția anterioară am definit sin și cos pentru $t \in [0, 2\pi]$. Dar ce facem dacă $t = 3\pi$ sau $t = -\pi/2$? Trebuie să *extindem* definiția la întregul $\mathbb{R}$.

Cheia este observarea că, dacă continui să parcurgi cercul trigonometric dincolo de 2π, te întorci în același punct ca înainte. La fel, dacă mergi în sens invers (*orar*, deci spre numerele negative), parcurgi același cerc.

1. Discută cu colegul: dacă pornești din $A(1,0)$ și parcurgi un arc de lungime $2\pi + \pi/4$, unde ajungi? Dar dacă parcurgi 4π? Ce coordonate are punctul respectiv?

Observă și descoperă!

Pe cercul trigonometric, identifică punctele asociate cu $t = 0$, $t = 2\pi$ și $t = -2\pi$.

2. Sunt aceste puncte distincte sau toate trei reprezintă același punct $A(1,0)$? De ce?
3. Care sunt coordonatele (x și y) ale punctului asociat lui $t = 5\pi/2$? (Indicație: $5\pi/2 = 2\pi + \pi/2$.)
4. Discută cu colegul: cum am putea exprima $\sin(t + 2\pi)$ în funcție de $\sin t$?

★ Important!

Extinderea la $\mathbb{R}$. Pentru orice $t \in \mathbb{R}$, asociem punctul $M(t)$ pe cercul trigonometric astfel:

- dacă $t = 0$, $M(0) = A(1,0)$;
- dacă $t > 0$, parcurgem cercul în sens trigonometric (antiorar), pornind din $A(1,0)$, pe o lungime de t;
- dacă $t < 0$, parcurgem cercul în sens orar, pornind din $A(1,0)$, pe o lungime de $|t|$;
- dacă $t > 2\pi$ sau $t < -2\pi$, parcurgem mai multe ture și ne oprim în punctul corespunzător.

Definim $\sin t$ = ordonata lui $M(t)$, $\cos t$ = abscisa lui $M(t)$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Periodicitate. Pentru orice $t \in \mathbb{R}$ și $k \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{\sin(t + 2k\pi) = \sin t, \qquad \cos(t + 2k\pi) = \cos t.}$$

Funcțiile sin și cos sunt *periodice* cu perioada $T = 2\pi$.

Definiție generală. O funcție $f : D \to \mathbb{R}$ se numește *periodică* dacă există $T > 0$ astfel încât:

- pentru orice $x \in D$, $x + T \in D$ și $x - T \in D$;

- $f(x+T)=f(x)$ pentru orice $x\in D$.

Cel mai mic $T>0$ cu această proprietate, dacă există, se numește *perioadă principală*.

Funcțiile sin **și** cos **au perioada principală** $T=2\pi$**.**

★ Important!

Definiția tangentei și a cotangentei.

$$\operatorname{tg}t=\frac{\sin t}{\cos t},\quad \cos t\neq 0;\qquad \operatorname{ctg}t=\frac{\cos t}{\sin t},\quad \sin t\neq 0.$$

Domeniile maxime de definiție.

- $\operatorname{tg}:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$;
- $\operatorname{ctg}:\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$.

Periodicitate. Pentru orice t din domeniul lor de definiție și orice $k\in\mathbb{Z}$:

$$\operatorname{tg}(t+k\pi)=\operatorname{tg}t,\qquad \operatorname{ctg}(t+k\pi)=\operatorname{ctg}t.$$

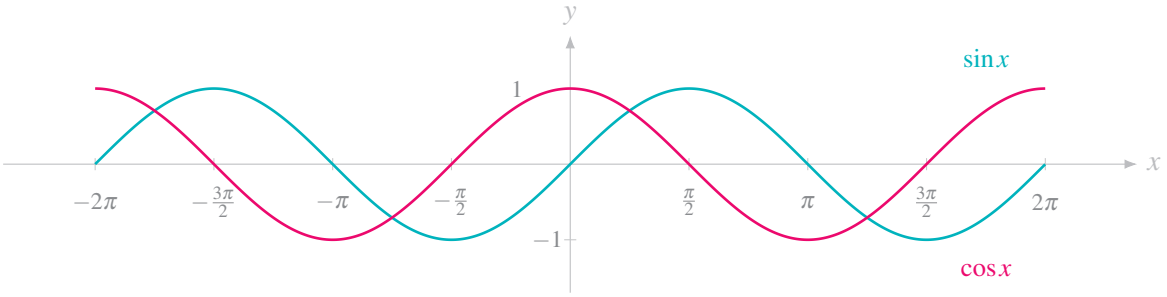
Așadar π este o perioadă a funcțiilor tg și ctg; se poate arăta că este chiar *perioada lor principală* (mai mică decât cea a funcțiilor sin și cos).

Valorile lui tg **și** ctg **în puncte remarcabile.**

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg}t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nu există
$\operatorname{ctg}t$	nu există	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

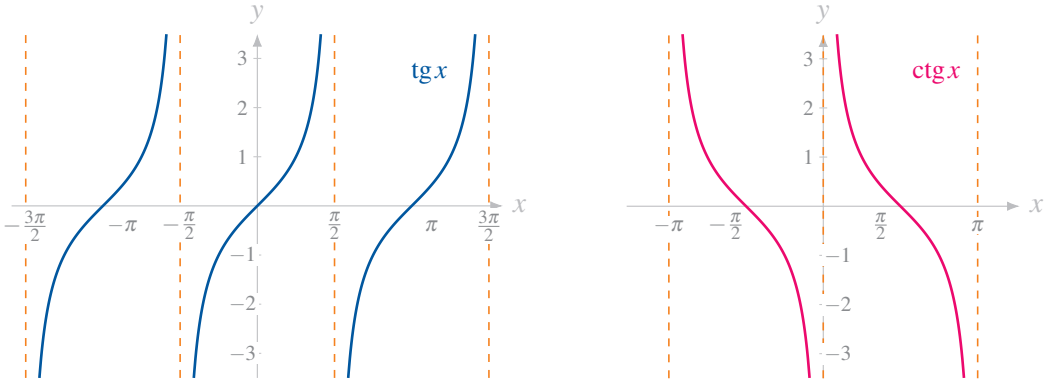
★ Important!

Graficele funcțiilor sin **și** cos **pe** $\mathbb{R}$**.** Datorită periodicității, este suficient să trasăm graficul pe un interval de lungime 2π, iar restul se obține prin translații. Mai jos, graficele lui $\sin x$ (turcoaz) și $\cos x$ (magenta) pe $[-2\pi,2\pi]$:



★ Important!

Graficele funcțiilor tg **și** ctg**.** Graficul fiecăreia este format din ramuri separate de drepte verticale (trasate punctat), duse prin punctele în care funcția nu este definită; graficul se apropie oricât de mult de aceste drepte, fără să le intersecteze. Mai jos, graficul lui $\operatorname{tg} x$ pe $(-3\pi/2, 3\pi/2) \setminus \{\pm\pi/2\}$ și graficul lui $\operatorname{ctg} x$ pe $(-\pi, \pi) \setminus \{0\}$:



Bine de știut!

Cum citesc graficele funcțiilor sin **și** cos**?**

- Ambele oscilează între -1 și 1, deci $|\sin x| \leq 1$ și $|\cos x| \leq 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- Graficul lui cos se obține din cel al lui sin printr-o translație la stânga cu $\pi/2$: $\cos x = \sin(x + \pi/2)$.
- Funcția sin este *impară*: $\sin(-x) = -\sin x$ (graficul simetric față de origine).
- Funcția cos este *pară*: $\cos(-x) = \cos x$ (graficul simetric față de axa Oy).

Aplicație digitală

Folosește **Desmos** sau **GeoGebra**.

- Reprezintă $f(x) = \sin x$ și $g(x) = \cos x$ pe același reper. Verifică perioada 2π.
- Reprezintă $h(x) = \operatorname{tg} x$. Observă dreptele verticale de care graficul se apropie, fără să le intersecteze.
- Adaugă glisoare (slidere) pentru a și b și reprezintă $f(x) = a\sin(bx)$. Cum se modifică amplitudinea?

Cum se modifică perioada?

Exersează!

Periodicitate

5 Calculează:

a) $\sin(2\pi+\pi/6)$;

b) $\cos(4\pi+\pi/3)$;

c) $\sin(-\pi/6)$;

d) $\cos(-\pi/4)$;

e) $\operatorname{tg}(\pi+\pi/4)$.

Model de rezolvare a): $\sin(2\pi+\pi/6)=\sin(\pi/6)=1/2$ (perioada este 2π).

6 Folosind simetria punctelor $M(t)$ și $M(-t)$ față de axa Ox:

a) Demonstrează că sin este impară.

b) Demonstrează că cos este pară.

c) Stabilește dacă tg este pară sau impară. Justifică.

Coordonate pe cercul trigonometric

7 Pe cercul trigonometric, indică în ce cadran se află punctul $M(t)$:

a) $t=5\pi/3$;

b) $t=-\pi/4$;

c) $t=9\pi/4$;

d) $t=-7\pi/6$.

8 Calculează $\operatorname{tg}a$ și $\operatorname{ctg}a$ pentru fiecare valoare a lui a:

$$\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}.$$

9 Calculează $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg}t$ și $\operatorname{ctg}t$ pentru fiecare valoare a lui t:

$$\frac{7\pi}{3},\frac{25\pi}{3},-\frac{17\pi}{3},-\frac{5\pi}{6},\frac{19\pi}{6},-\frac{37\pi}{6},\frac{33\pi}{4},-\frac{15\pi}{4},-\frac{47\pi}{4}.$$

Lectură grafică

10 Pe graficul de mai sus al funcției $\sin x$, citește:

a) Pe ce subintervale ale intervalului $[0,2\pi]$ este $\sin x$ strict crescătoare? Pe ce subintervale este strict descrescătoare?

b) Pentru ce valori ale lui x avem $\sin x = 0$?

c) Pentru ce valori ale lui $x \in [0, 2\pi]$ avem $\sin x = 1$? Dar $\sin x = -1$?

11 ☆ **Portofoliu.** Determină *cardinalul* (numărul de elemente) al mulțimii:

$$A = \left\{ \sin \frac{n\pi}{3} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(Indicație: folosește periodicitatea pentru a vedea că valorile se repetă.)

12 Determină domeniul maxim de definiție al funcțiilor:

a) $f(x) = \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$;

b) $f(x) = \dfrac{2+\cos x}{1+\cos x}$;

c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$;

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-\sin x}{2+\sin x}}$;

e) $f(x) = \dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$.

Lecția L6.3

Relații între funcțiile trigonometrice

Amintește-ți!

Cunoști deja *formula fundamentală a trigonometriei*:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Pornind de la formula fundamentală, dedu o formulă care exprimă $\sin x$ în funcție de $\cos x$ (cu o ambiguitate de semn).
2. Discută cu colegul: dacă $\sin x = 3/5$, ce valori poate avea $\cos x$? Cum stabilim semnul?

Observă și descoperă!

Pe cercul trigonometric, fie $M(t) = (\cos t, \sin t)$ punctul asociat lui t. Privește acum punctul M' obținut prin *simetria* lui M față de axa Oy (sau, echivalent, asociat lui $\pi - t$).

3. Care sunt coordonatele lui M' în funcție de $\cos t$ și $\sin t$?
4. Exprimă $\sin(\pi - t)$ și $\cos(\pi - t)$ în funcție de $\sin t$ și $\cos t$.
5. Acum considerăm punctul M'' asociat lui $\pi/2 - t$. (Indicație: simetria față de prima bisectoare $y = x$ schimbă coordonatele $(x, y) \leftrightarrow (y, x)$.) Discută cu colegul: ce relație obții?

★ Important!

Relații de tip „formulă fundamentală”.

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

Relații derivate (împărțim la $\cos^2 x$ când $\cos x \neq 0$):

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{deci:} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Analog (împărțim la $\sin^2 x$ când $\sin x \neq 0$):

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Relația dintre tg și ctg. Pentru x în domeniul comun:

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1, \quad \text{deci} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

★ **Important!**

Formule pentru argumentul $-x$ (paritate / imparitate).
Pe cercul trigonometric, punctul asociat lui $-t$ este *simetricul* punctului $M(t)$ față de axa Ox. Deci coordonatele se schimbă: $(\cos t, \sin t) \to (\cos t, -\sin t)$. Așadar:

$$\boxed{\cos(-x) = \cos x \text{ (pară)}, \quad \sin(-x) = -\sin x \text{ (impară)}.}$$

Pentru tangentă și cotangentă:

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \text{ (impară)}, \quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x \text{ (impară)}.$$

Formule pentru argumentul $\pi/2 - x$ (complementare).
Pe cercul trigonometric, punctul asociat lui $\pi/2 - t$ este *simetricul* lui $M(t)$ față de prima bisectoare $y = x$. Coordonatele se schimbă: $(\cos t, \sin t) \to (\sin t, \cos t)$. Așadar:

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.}$$

Pentru tangentă și cotangentă:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x.$$

★ **Important!**

Formule pentru argumentul $\pi - x$ (suplimentare).
Punctul asociat lui $\pi - t$ este *simetricul* lui $M(t)$ față de axa Oy. Coordonatele: $(\cos t, \sin t) \to (-\cos t, \sin t)$. Așadar:

$$\boxed{\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x.}$$

Pentru tangentă și cotangentă:

$$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(\pi - x) = -\operatorname{ctg} x.$$

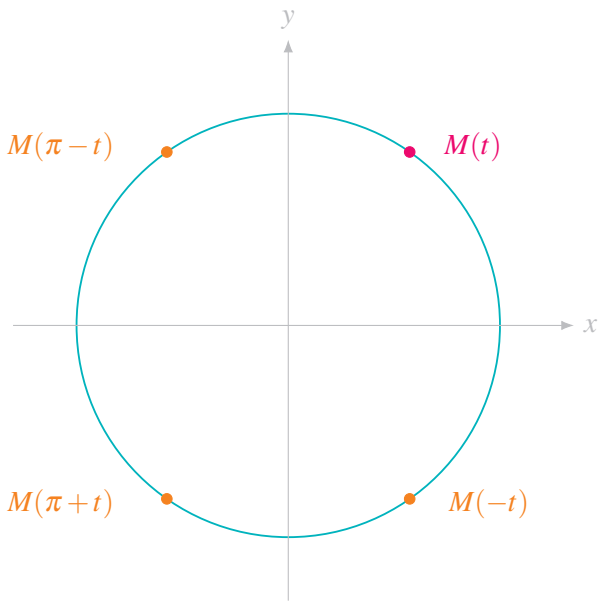
Formule pentru argumentul $\pi + x$.
Punctul asociat lui $\pi + t$ este *simetricul* lui $M(t)$ față de origine. Coordonatele: $(\cos t, \sin t) \to (-\cos t, -\sin t)$. Așadar:

$$\boxed{\sin(\pi + x) = -\sin x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x.}$$

Pentru tangentă și cotangentă:

$$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(\pi + x) = \operatorname{ctg} x.$$

(Observă: aceste relații confirmă că tg și ctg au perioada π.)



Bine de știut!

Reguli mnemonice.

- Pentru argumente de forma $k\pi \pm x$: *numele funcției nu se schimbă*, semnul depinde de cadran.
- Pentru argumente de forma $\frac{\pi}{2} \pm x$ sau $\frac{3\pi}{2} \pm x$: *numele funcției se schimbă* ($\sin \leftrightarrow \cos$, $\operatorname{tg} \leftrightarrow \operatorname{ctg}$), semnul depinde de cadran.

Exersează!

Aplicarea formulei fundamentale

6 Știind că $\sin x = \frac{4}{5}$ și $x \in (0, \pi/2)$, calculează $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

Model de rezolvare: $\cos^2 x = 1 - 16/25 = 9/25$, deci $\cos x = \pm 3/5$. Cum $x \in (0, \pi/2)$ (cadranul I), rezultă $\cos x > 0$, deci $\cos x = 3/5$. $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x = (4/5)/(3/5) = 4/3$. $\operatorname{ctg} x = 3/4$.

7 a) Știind că $\cos x = -\frac{2}{3}$ și $x \in (\pi/2, \pi)$, calculează $\sin x$, $\operatorname{tg} x$.

b) Știind că $\cos t = \frac{2}{5}$ și $t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, calculează $\sin t$ și $\operatorname{tg} t$.

c) Știind că $\sin t = \frac{3}{4}$ și $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, calculează $\cos t$ și $\operatorname{ctg} t$.

d) Știind că $\cos t = -\frac{3}{5}$ și $t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, calculează $\sin t$ și $\operatorname{tg} t$.

8 a) Știind că $\operatorname{tg} x = 2$ și $x \in (\pi, 3\pi/2)$, calculează $\sin x$ și $\cos x$.

b) Știind că $\operatorname{tg} x = -2$ și $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, calculează $2\sin^2 x - 3\cos^2 x$ și $2\sin x - 3\cos x$.

c) Știind că $\operatorname{ctg} x = -3$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, calculează $\sin x$, $\cos x$ și demonstrează că $\frac{2\sin x - 3\cos x}{3\sin x - 4\cos x} \in \mathbb{Q}$.

d) Știind că $\operatorname{tg} x = 2$ și $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, calculează $\sin x$, $\cos x$ și demonstrează că

$$\frac{2\sin^2 x - 3\sin x\cos x}{3\sin x\cos x - 4\cos^2 x} \in \mathbb{Q}.$$

e) Știind că $\operatorname{ctg} t = 6\operatorname{tg} t - 1$ și $t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, calculează $\sin t$ și $\cos t$.

f) Știind că $\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, calculează $\sin x$ și $\cos x$.

Indicație: folosește $\cos^2 x = 1/(1+\operatorname{tg}^2 x)$.

Reduceri prin formulele complementare/suplimentare

9 Scrie sub formă mai simplă:

a) $\sin(\pi - x)$;

b) $\cos(\pi/2 + x)$;

c) $\operatorname{tg}(\pi - x)$;

d) $\sin(3\pi/2 - x)$.

Indicație b): $\cos(\pi/2 + x) = \cos[\pi/2 - (-x)] = \sin(-x) = -\sin x$.

10 Demonstrează identitățile (pentru x în domeniul lor):

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$;

b) $\frac{1-\cos^2 x}{\sin x\cos x} = \operatorname{tg} x$;

c) $\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$;

d) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$;

e) $\cos^4 x - \sin^4 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$;

f) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$;

g) $\frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x - \operatorname{ctg}^2 x} = \operatorname{tg}^6 x$;

h) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x\cos x}$;

i) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x} = 1$.

Identități

11 Demonstrează că, pentru orice x din domeniul comun de definiție, $\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x \cdot \sin^2 x$.

12 ☆ **Portofoliu.** Calculează valoarea expresiilor:

a) $E = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ + \sin^2 90^\circ$;

b) $E = \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \sin 3^\circ + \cdots + \sin 360^\circ$;

c) $E = \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 89^\circ$.

Indicație a): folosește $\sin(90^\circ - x) = \cos x$, deci $\sin^2 x + \sin^2(90^\circ - x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Lecția L6.4

Formule pentru suma și diferența a două numere reale

Amintește-ți!

Cu ce este egal $\sin(a+b)$? Întrebarea pare să aibă o soluție evidentă: „$\sin a+\sin b$”. Dar e greșită! Verifică: $\sin(\pi/2+\pi/2)=\sin\pi=0$, dar $\sin(\pi/2)+\sin(\pi/2)=1+1=2$. Deci $\sin(a+b)\neq\sin a+\sin b$ în general.

1 Discută cu colegul: cum am putea exprima $\sin(a+b)$ folosind doar $\sin a,\sin b,\cos a,\cos b$?

2 Verifică singur, pe câteva exemple, egalitatea $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$. De exemplu, $\sin(\pi/4+\pi/4)=\sin(\pi/2)=1$, iar $\sin(\pi/4)\cos(\pi/4)+\cos(\pi/4)\sin(\pi/4)=(\sqrt{2}/2)(\sqrt{2}/2)+(\sqrt{2}/2)(\sqrt{2}/2)=1/2+1/2=1$ ✓.

★ Important!

Formulele de adunare (sumă și diferență). Pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b,}$$

$$\boxed{\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b,}$$

$$\boxed{\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b,}$$

$$\boxed{\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b.}$$

Pentru tangentă (acolo unde $\cos a,\cos b,\cos(a\pm b)\neq 0$):

$$\boxed{\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b},\qquad \operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}.}$$

Demonstrație (idee, pentru $\cos(a-b)$). Pe cercul trigonometric, fie M_a punctul asociat lui a și M_b asociat lui b. Arcele M_bM_a și $AM(a-b)$ au aceeași lungime, deci coardele corespunzătoare sunt egale: $|M_aM_b|=|AM(a-b)|$, unde $A(1,0)$ și $M(a-b)=(\cos(a-b),\sin(a-b))$. Calculând cu formula distanței:

$$|M_aM_b|^2=(\cos a-\cos b)^2+(\sin a-\sin b)^2=2-2(\cos a\cos b+\sin a\sin b)$$

și

$$|AM(a-b)|^2=(\cos(a-b)-1)^2+\sin^2(a-b)=2-2\cos(a-b).$$

Egalând cele două: $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$. Celelalte formule se obțin din aceasta (pentru $\cos(a+b)$ înlocuiește b cu $-b$, pentru $\sin(a\pm b)$ folosește relațiile complementare). □

★ **Important!**

Formule pentru argumentul dublu (înlocuim $a = b = x$).

$$\boxed{\sin 2x = 2\sin x\cos x.}$$

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}} \quad (\text{pentru } \cos x \neq 0 \text{ și } \cos 2x \neq 0).$$

Justificare. $\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x\cos x + \cos x\sin x = 2\sin x\cos x$.
Pentru $\cos 2x$: $\cos(x+x) = \cos x\cos x - \sin x\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Cele două forme alternative se obțin folosind $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, respectiv $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

★ **Important!**

Formule pentru argumentul $x/2$ (semiunghi). Din $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ și $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, înlocuind x cu $x/2$, obținem:

$$\boxed{\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \qquad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}.}$$

Așadar:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}},$$

unde semnul depinde de cadranul în care se află $x/2$.

Tangenta semiunghiului:

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}} \quad (\text{pentru } \sin x \neq 0).$$

Bine de știut!

Cum aleg formula potrivită?

- Pentru a calcula *valori exacte* (de ex., $\sin 75°$): folosește descompunerea $75° = 30° + 45°$ și formula sumei.
- Pentru a transforma $\sin 2x$ sau $\cos 2x$: folosește formulele pentru argumentul dublu.
- Pentru calcule cu $x/2$ (de ex., $\cos(\pi/8)$): folosește formulele pentru semiunghi ($\pi/8 = (\pi/4)/2$, deci pornești de la $\cos(\pi/4)$).

Aplicație digitală

Folosește **Desmos**.

- Verifică grafic identitatea $\sin 2x = 2\sin x\cos x$: reprezintă $f(x) = \sin(2x)$ și $g(x) = 2\sin x\cos x$. Sunt identice?
- Verifică $\cos(a+b)$: alege un a fix și reprezintă $h_1(b) = \cos(a+b)$ și $h_2(b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$. Coincid?

Exersează!

Calcul de valori exacte

3 Calculează valorile exacte:

a) $\sin 75^\circ$ (folosind $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$);

b) $\cos 15^\circ$ (folosind $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$);

c) $\operatorname{tg} 75^\circ$;

d) $\sin\dfrac{\pi}{12}$ (folosind $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$);

e) $\sin\dfrac{5\pi}{12}$;

f) $\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{12}$;

g) $\cos\dfrac{11\pi}{12}$;

h) $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{12}$;

i) $\sin\dfrac{23\pi}{12}$;

j) $\cos\dfrac{29\pi}{12}$;

k) $\operatorname{tg}\dfrac{103\pi}{12}$.

Model de rezolvare a):

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ\cos 30^\circ + \cos 45^\circ\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

4 a) Știind că $\cos a = \dfrac{3}{5}$, $\sin b = \dfrac{1}{3}$ și $a, b \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, calculează $\sin(a+b)$ și $\operatorname{tg}(a-b)$.

b) Știind că $\cos a = \dfrac{3}{5}$, $\sin b = -\dfrac{8}{17}$ și $a, b \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, calculează $\sin(a+b)$ și $\operatorname{tg}(2a-b)$.

c) Știind că $\sin a = -\dfrac{3}{5}$, $\sin b = -\dfrac{8}{17}$ și $a, b \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, calculează $\sin(a+b)$ și $\operatorname{ctg}(a+2b)$.

Calcul cu argument dublu/semiunghi

5 a) Știind că $\sin x = \frac{3}{5}$ și $x \in (0, \pi/2)$, calculează $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$.

b) Știind că $\sin a = \frac{5}{13}$ și $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, calculează $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\sin 3a$, $\cos 3a$, $\operatorname{tg}\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$.

c) Știind că $\cos a = \frac{2}{3}$ și $a \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, calculează $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\sin 3a$, $\cos 3a$, $\operatorname{tg} 2a$.

Model de rezolvare a): $\cos x = 4/5$ (cadranul I). $\sin 2x = 2 \cdot (3/5) \cdot (4/5) = 24/25$. $\cos 2x = 1 - 2 \cdot 9/25 = 7/25$. $\operatorname{tg} 2x = 24/7$.

6 a) Știind că $\cos x = -\frac{1}{3}$ și $x \in (\pi/2, \pi)$, calculează $\sin(x/2)$ și $\cos(x/2)$.

b) Știind că $\sin a = \frac{4}{5}$ și $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, calculează $\sin \frac{a}{2}$, $\cos \frac{a}{2}$.

c) Știind că $\cos a = \frac{2}{3}$ și $a \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, calculează $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$.

Indicație: dacă $x \in (\pi/2, \pi)$, atunci $x/2 \in (\pi/4, \pi/2)$, deci punctul $M(x/2)$ se află în cadranul I și $\sin(x/2), \cos(x/2) > 0$.

7 a) Știind că $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = 2$ și $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, calculează $\sin \frac{a}{2}$, $\cos \frac{a}{2}$, $\sin a$ și $\cos a$.

b) Știind că $\cos a = \frac{2}{5}$ și $a \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, calculează $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ și $\operatorname{tg} a$.

c) Știind că $\sin a = \frac{3}{4}$ și $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, calculează $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ și $\operatorname{ctg} a$.

Identități

8 Demonstrează identitățile (pentru valorile variabilelor pentru care expresiile sunt definite):

a) $\sin(a+b) \cdot \sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$;

b) $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$;

c) $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg} x$;

d) $\frac{1 - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} a} = \frac{\cos 2a}{1 + \sin 2a}$;

e) $\frac{\cos a + \cos^2 a}{\sin 2a} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{a}{2}$;

f) $\frac{\cos a}{1 + \sin a} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)$;

g) $\sin 2a \, (\operatorname{tg} a + \operatorname{ctg} a) = 2$;

h) $\sin^2 a - \sin(a+b) \cdot \sin(a-b) = \sin^2 b$;

i) $\frac{1 - \cos x + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

9 ☆ **Portofoliu.** Calculează valoarea exactă a lui $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$. *Indicație:* folosește formula pentru $\sin 2x$.

Lecția L6.5

Transformarea sumelor în produse și a produselor în sume

Amintește-ți!

În lecția anterioară ai învățat formulele de adunare. Pornind de la ele, putem deduce și formulele inverse: cum transformăm un produs $\sin a\cos b$ într-o sumă sau o sumă $\sin x+\sin y$ într-un produs?

1. Folosind formula $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$, scrie și formula pentru $\sin(a-b)$. Adună cele două relații. Ce obții?
2. Discută cu colegul: la ce ar putea fi util să transformi o sumă în produs (sau invers)?

★ Important!

Transformarea produselor în sume. Pornind de la formulele de adunare:

- Adunând formulele pentru $\sin(a+b)$ și $\sin(a-b)$:

$$\boxed{\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right].}$$

- Adunând formulele pentru $\cos(a+b)$ și $\cos(a-b)$:

$$\boxed{\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right].}$$

- Scăzând formula pentru $\cos(a+b)$ din formula pentru $\cos(a-b)$:

$$\boxed{\sin a\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right].}$$

Transformarea sumelor în produse. Notând $a+b=x$, $a-b=y$, obținem $a=(x+y)/2$, $b=(x-y)/2$. Înlocuind în formulele de mai sus, obținem:

$$\boxed{\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.}$$

$$\boxed{\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.}$$

$$\boxed{\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.}$$

$$\boxed{\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.}$$

Bine de știut!

Cum reții formulele? Privește prima formulă: $\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

- În membrul stâng avem o sumă de sinusuri.
- În membrul drept avem un produs de forma $2\sin\cdot\cos$.
- Argumentul lui sin este *media* lui x și y, iar al lui cos este *semidiferența*.

Toate celelalte se construiesc analog, observând că:

- „sin + sin” dă $2\sin(\text{media})\cdot\cos(\text{semidiferența})$, iar „sin − sin” dă $2\cos(\text{media})\cdot\sin(\text{semidiferența})$ (sinusul primește media la „+” și semidiferența la „−”);
- „cos + cos” dă $2\cos(\text{media})\cdot\cos(\text{semidiferența})$;
- „cos − cos” dă $-2\sin(\text{media})\cdot\sin(\text{semidiferența})$ (atenție la semn!).

Exersează!

Transformare produs → sumă

3 Transformă produsele în sume:

a) $2\sin 70^\circ\cos 20^\circ$;

b) $\cos 50^\circ\cos 10^\circ$;

c) $\sin 5x\sin 3x$;

d) $\sin 25^\circ\cdot\cos 155^\circ$;

e) $2\sin 25^\circ\cos 155^\circ+\sin 10^\circ$;

f) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$;

g) $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{24}$;

h) $4\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 50^\circ$.

Model de rezolvare a): $2\sin 70^\circ\cos 20^\circ=\sin(70^\circ+20^\circ)+\sin(70^\circ-20^\circ)=\sin 90^\circ+\sin 50^\circ=1+\sin 50^\circ$.

Transformare sumă → produs

4 Transformă sumele în produse:

a) $\sin 50^\circ+\sin 10^\circ$;

b) $\cos 80^\circ+\cos 20^\circ$;

c) $\sin 75^\circ-\sin 15^\circ$;

d) $\cos 5x-\cos 3x$;

e) $1+\cos x$;

f) $1-\cos x$;

g) $\sin x+\cos x$;

h) $\sin x-\cos x$;

i) $1+\sin x-\cos x$;

j) $1-\sin x+\cos x$.

Aplicații

5 Calculează valoarea exactă a lui $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ$.

Indicație: $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ=2\sin 45^\circ\cos 30^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

6 Calculează: $\cos 75^\circ\cdot\cos 15^\circ$.

7 Demonstrează identitățile de la a)–d) (pentru valorile lui x și a pentru care expresiile au sens) și calculează valorile expresiilor de la e) și f).

a) $\dfrac{\sin 5x+\sin 3x}{\cos 5x+\cos 3x}=\operatorname{tg}4x$;

b) $\dfrac{\sin a+\sin 2a+\sin 3a}{\cos a+\cos 2a+\cos 3a}=\operatorname{tg}2a$;

c) $\dfrac{\cos 7a}{2\cos a}+\cos 4a+\dfrac{1}{2}=\cos 2a+\cos 6a$;

d) $\operatorname{tg}a=\operatorname{ctg}a-2\operatorname{ctg}2a$;

e) $2\cos 10^\circ\cos 40^\circ-\cos 50^\circ$;

f) $\cos 20^\circ-2\sin 20^\circ\sin 40^\circ$.

8 ☆ **Portofoliu.** Calculează valoarea exactă a diferenței:

$$S=\cos 36^\circ-\cos 72^\circ.$$

Indicație: folosește formula $\cos x-\cos y=-2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$.

9 Știind că $a+b+c=\pi$, demonstrează următoarele identități (pentru valorile lui a, b, c pentru care expresiile au sens):

a) $\sin a+\sin b+\sin c=4\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{c}{2}$;

b) $\cos a+\cos b+\cos c=1+4\sin\dfrac{a}{2}\sin\dfrac{b}{2}\sin\dfrac{c}{2}$;

c) $\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b+\operatorname{tg}c=\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b\cdot\operatorname{tg}c$;

d) $\operatorname{ctg}\dfrac{a}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{b}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{c}{2}=\operatorname{ctg}\dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{b}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{c}{2}$.

Lecția L6.6

Funcții trigonometrice inverse

Amintește-ți!

La U3 ai învățat că o funcție este inversabilă dacă și numai dacă este *bijectivă*. Pentru funcțiile de gradul al doilea, ai văzut că trebuie restrâns domeniul pentru ca acestea să devină bijective (de exemplu, $f(x) = x^2$ pe $[0, +\infty)$).

Aceeași idee se aplică funcțiilor trigonometrice. Privește graficul funcției sin: această funcție nu este injectivă pe $\mathbb{R}$ (este periodică — diferite valori ale lui x dau aceeași valoare a lui $\sin x$). Pentru a putea defini o „inversă", trebuie să restrângem domeniul.

1 Discută cu colegul: cum ar trebui să restrângi domeniul funcției sin ca să fie bijectivă pe imaginea sa $[-1, 1]$? Există mai multe opțiuni; care e cea „mai naturală"?

★ Important!

Funcția arcsinus. Restrângem sin la intervalul $[-\pi/2, \pi/2]$. Pe acest interval, sin este strict crescătoare, ia toate valorile din $[-1, 1]$, deci este bijectivă. Inversa ei se notează arcsin:

$$\boxed{\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].}$$

Pentru orice $y \in [-1, 1]$, $\arcsin y$ este *singurul* unghi $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ astfel încât $\sin x = y$.

Funcția arccosinus. Restrângem cos la $[0, \pi]$. Pe acest interval, cos este strict descrescătoare, deci funcția $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ este bijectivă. Inversa:

$$\boxed{\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].}$$

Funcția arctangentă. Restrângem tg la $(-\pi/2, \pi/2)$. Aici tg este strict crescătoare, ia toate valorile reale, deci funcția $\operatorname{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ este bijectivă. Inversa:

$$\boxed{\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).}$$

Funcția arccotangentă. Restrângem ctg la $(0, \pi)$. Inversa:

$$\boxed{\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi).}$$

Atenție. Aceste inverse *nu* sunt $1/\sin$, $1/\cos$ etc.! Notația arcsin se citește „arcsinus" și înseamnă *unghiul al cărui sinus este…*

★ Important!

Valori în puncte remarcabile.

Valori pentru $y<0$ (folosind imparitatea: $\arcsin(-y)=-\arcsin y$):

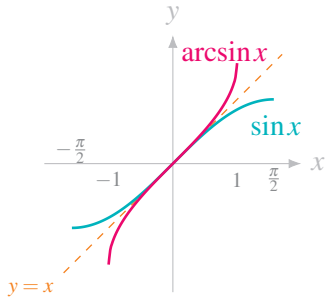
y	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\arcsin y$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$

y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin y$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos y$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

y	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} y$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Relații utile.

- $\arcsin(-y)=-\arcsin y$ (impară);
- $\arccos(-y)=\pi-\arccos y$;
- $\operatorname{arctg}(-y)=-\operatorname{arctg} y$ (impară);
- $\arcsin y+\arccos y=\frac{\pi}{2}$, pentru orice $y\in[-1,1]$.



Aplicație digitală

Folosește **Desmos** pentru a explora.

- Reprezintă $f(x)=\arcsin x$ și verifică domeniul $[-1,1]$.
- Reprezintă pe același reper $f(x)=\sin x$ pe $[-\pi/2,\pi/2]$ și $g(x)=\arcsin x$. Sunt graficele lor simetrice față de dreapta $y=x$?
- Verifică numeric: $\arcsin(\sin 0{,}5)=?$ și $\sin(\arcsin 0{,}5)=?$ (în Desmos, numărul 0,5 se introduce ca `0.5`).

Exersează!

Calculul valorilor în puncte remarcabile

2 Calculează:

a) $\arcsin(1/2)$;

b) $\arccos(\sqrt{3}/2)$;

c) $\operatorname{arctg} 1$;

d) $\arcsin(-\sqrt{2}/2)$;

e) $\arccos(-1/2)$;

f) $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{arctg} 1$;

g) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos(-1)$;

h) $\arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - \arcsin 1$;

i) $\arccos\dfrac{1}{2} - \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

Model de rezolvare a): Căutăm $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ cu $\sin x = 1/2$. Răspuns: $x = \pi/6$.

Aplicații

3 Calculează:

a) $\sin(\arcsin(1/3))$ — folosește direct definiția;

b) $\cos(\arcsin(3/5))$ — folosește $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

c) $\arcsin(\sin \pi/6)$;

d) $\arccos(\cos(7\pi/6))$;

e) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \arcsin\dfrac{2}{3}\right)$;

f) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \arccos\dfrac{1}{3}\right)$;

g) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \arccos\dfrac{1}{3}\right)$;

h) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}\right)$.

Subpunctele b) și e)–h) sunt activități de extindere.

Indicație b): fie $\alpha = \arcsin(3/5)$. Atunci $\sin\alpha = 3/5$ și $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$. Așadar $\cos\alpha \geq 0$, iar $\cos^2\alpha = 1 - 9/25 = 16/25$, deci $\cos\alpha = 4/5$.

Indicație d): atenție, $7\pi/6 \notin [0, \pi]$, dar $\cos(7\pi/6) = -\cos(\pi/6) = -\sqrt{3}/2$. Deci:

$$\arccos(\cos(7\pi/6)) = \arccos(-\sqrt{3}/2) = \pi - \arccos(\sqrt{3}/2) = \pi - \pi/6 = 5\pi/6.$$

4 **Extindere.** Demonstrează egalitățile:

a) $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \pi$;

b) $\arccos\dfrac{1}{3} = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$;

c) $2\arccos\dfrac{3}{4} = \arccos\dfrac{1}{8}$;

d) $\operatorname{arctg} 3 = \dfrac{\pi}{4} + \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Indicație a): folosește formula $\operatorname{tg}(a+b)$ și fii atent la cadran.

5 ☆ **Portofoliu. Extindere.** Calculează: $E = \arcsin\left(\dfrac{3}{5}\right) + \arcsin\left(\dfrac{4}{5}\right)$.

Indicație: fie $\alpha = \arcsin(3/5)$, $\beta = \arcsin(4/5)$. Calculează $\sin(\alpha+\beta)$ folosind formula sumei. Concluzie?

Lecția L6.7

Ecuații trigonometrice

Amintește-ți!

O ecuație de forma $\sin x = 1/2$ pare simplă. Pe primul cadran, soluția este $x = \pi/6$. Dar pe întreaga axă $\mathbb{R}$? Cum se pot găsi *toate* soluțiile?

1. Pe cercul trigonometric, marchează toate punctele $M(t)$ pentru care $\sin t = 1/2$ (adică ordonata punctului este $1/2$). Câte puncte ai pe cerc?
2. Discută cu colegul: cum se poate scrie sintetic mulțimea *tuturor* soluțiilor reale ale ecuației $\sin x = 1/2$, ținând cont de periodicitate?

★ Important!

Tipul 1: $\sin x = a$**, cu** $a \in [-1,1]$**.**
Pe cercul trigonometric, ordonata $y = a$ este atinsă în două puncte (în general): unul în cadranul I (dacă $a > 0$) sau în cadranul IV (dacă $a < 0$), celălalt simetric față de axa Oy.
Soluțiile generale:

$$\boxed{\sin x = a \iff x \in \{\arcsin a + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin a + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}.}$$

Cazuri particulare (trebuie reținute, sunt foarte folosite):

- $\sin x = 0 \iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
- $\sin x = 1 \iff x = \pi/2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
- $\sin x = -1 \iff x = -\pi/2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Dacă $|a| > 1$**:** ecuația *nu are soluții reale*.
Tipul 2: $\cos x = a$**, cu** $a \in [-1,1]$**.**

$$\boxed{\cos x = a \iff x \in \{\pm \arccos a + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}.}$$

Cazuri particulare:

- $\cos x = 0 \iff x = \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
- $\cos x = 1 \iff x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
- $\cos x = -1 \iff x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Tipul 3: $\operatorname{tg} x = a$**, cu** $a \in \mathbb{R}$**.**

$$\boxed{\operatorname{tg} x = a \iff x = \operatorname{arctg} a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$$

Tipul 4: $\operatorname{ctg} x = a$**, cu** $a \in \mathbb{R}$**.**

$$\boxed{\operatorname{ctg} x = a \iff x = \operatorname{arcctg} a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$$

★ **Important!**

Tipul 5: ecuații de forma $\sin f(x) = \sin g(x)$**.**
Două unghiuri au același sinus dacă și numai dacă sunt egale (modulo 2π) sau suplementare (modulo 2π):

$$\boxed{\sin f(x) = \sin g(x) \iff f(x) = g(x) + 2k\pi \text{ sau } f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$$

Tipul 6: ecuații de forma $\cos f(x) = \cos g(x)$**.**
Două unghiuri au același cosinus dacă și numai dacă sunt egale sau opuse (modulo 2π):

$$\boxed{\cos f(x) = \cos g(x) \iff f(x) = \pm g(x) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$$

Tipul 7: ecuații de forma $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x)$**.**

$$\boxed{\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x) \iff f(x) = g(x) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},}$$

pentru valorile lui x cu $f(x), g(x) \neq \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.
(Și analog pentru ctg, cu condiția $f(x), g(x) \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.)

★ **Important!**

Tipul 8: ecuații de forma $a\sin x + b\cos x = c$**, cu** $a, b \in \mathbb{R}^*$**.**
Strategia 1 (metoda unghiului auxiliar). Împărțim la $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Deoarece $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, există un unghi φ astfel încât $\cos\varphi = a/\sqrt{a^2+b^2}$ și $\sin\varphi = b/\sqrt{a^2+b^2}$. Ecuația devine:

$$\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \iff \sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Aceasta este o ecuație de tipul 1, ușor de rezolvat. Are soluții doar dacă $|c| \leq \sqrt{a^2+b^2}$.
Strategia 2 (substituția $t = \operatorname{tg}(x/2)$**).** Folosim formulele:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Substituind, obținem o ecuație rațională în t (de obicei polinomială de gradul al doilea după ce eliminăm numitorul).

Atenție: substituția $t = \operatorname{tg}(x/2)$ are sens numai pentru $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Valorile $x = \pi + 2k\pi$ se verifică separat în ecuația inițială, altfel se pot pierde soluții (de exemplu, $\sin x - \cos x = 1$ are și soluțiile $x = \pi + 2k\pi$, pe care substituția nu le dă).

Bine de știut!

Strategie generală pentru ecuații trigonometrice.

1. *Identifică tipul ecuației*: este de tip $\sin = a$, $\sin f = \sin g$, $a\sin + b\cos = c$ etc.?
2. *Aplică formula corespunzătoare* (vezi Important).
3. *Verifică* dacă ai soluții — uneori $|a| > 1$ și nu există.
4. *Selectează* soluțiile care aparțin intervalului dat, dacă enunțul precizează un interval (de ex., $[0, 2\pi]$).

Exersează!

Ecuații elementare

3 Rezolvă în $\mathbb{R}$:

a) $\sin x = \sqrt{2}/2$;
b) $\cos x = -1/2$;
c) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;
d) $\sin x = 2$ (justifică);
e) $\sin 2x = 1$;
f) $\cos 2x = 0$;
g) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
h) $2\sin^2 x = 1$;
i) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$.

4 Rezolvă *pe intervalul* $[0, 2\pi]$:

a) $\sin x = 1/2$;
b) $\cos x = \sqrt{3}/2$;
c) $\operatorname{tg} x = 1$;
d) $\cos x = -\sqrt{2}/2$;
e) $\cos^2 2x = 1$;
f) $\sin 4x = 0$;
g) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$;
h) $\sin^2 x = 1$;
i) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} 2x$.

Ecuații de forma $\sin f(x)=\sin g(x)$, $\cos f(x)=\cos g(x)$, $\operatorname{tg} f(x)=\operatorname{tg} g(x)$

5 Rezolvă în $\mathbb{R}$:

a) $\sin 2x=\sin x$;

b) $\cos 3x=\cos x$;

c) $\sin x=\cos x$;

d) $\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} x$;

e) $\sin x=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$;

f) $\sin x+\sin 2x=0$;

g) $\cos x+\cos 2x=0$;

h) $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x=0$;

i) $\sin x+\cos x=0$;

j) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$;

k) $\cos x+\sqrt{3}\sin x=0$.

Indicație c): $\cos x=\sin(\pi/2-x)$, deci ecuația devine $\sin x=\sin(\pi/2-x)$.

Ecuații reductibile

6 Rezolvă pe $[0,2\pi]$:

a) $2\sin^2 x-\sin x-1=0$ (substituția $u=\sin x$);

b) $\sin 2x=2\cos x$ (folosește $\sin 2x=2\sin x\cos x$);

c) $\sin x+\cos x=1$;

d) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$;

e) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$;

f) $2\cos^2 x+\cos x-1=0$;

g) $3\operatorname{tg}^2 x-4\sqrt{3}\operatorname{tg} x+3=0$;

h) $\cos 2x+3\sin x-1=0$;

i) $\cos 2x+\cos x+1=0$;

j) $1+\sin x-\cos x=0$;

k) $\sin x+\cos x=2$.

Indicație a): cu $u=\sin x$, ecuația devine $2u^2-u-1=0$, deci $u=1$ sau $u=-1/2$.

Modelare

7 Nivelul apei la o stație de monitorizare variază, din cauza mareei, după formula:

$$h(t)=3+1{,}5\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \quad (\text{m}, t \text{ în ore}).$$

a) Care este nivelul maxim al apei? La ce momente din intervalul $[0,24]$ (t în ore) este atins?

b) Pe ce intervale de timp din $[0,24]$ nivelul apei depășește 3,75 m?

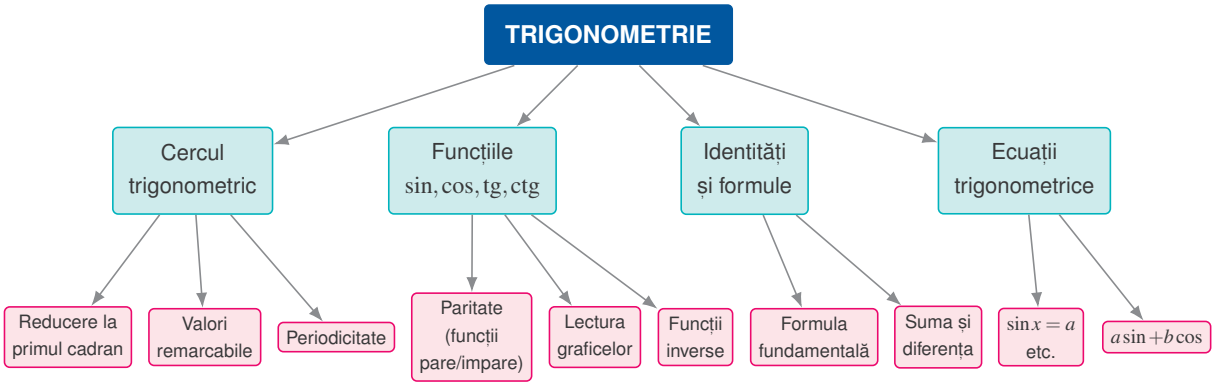
8 ☆ **Portofoliu.** Determină valorile numărului real m știind că ecuația $m\sin x+\cos x=2$ are cel puțin o soluție reală. Rezolvă problema prin cel puțin două metode.

OBSERV!

Lista de observare a activității	Da	Nu
Am folosit corect valorile unghiurilor remarcabile?		
Am aplicat corect formulele și identitățile trigonometrice?		
Am respectat pașii de rezolvare și ordinea operațiilor?		
Am avut nevoie de ajutor?		

Recapitulare

Hartă conceptuală



De reținut!

La finalul acestei unități trebuie să poți:

- localiza pe cercul trigonometric punctele asociate unor numere reale sau unor unghiuri măsurate în grade ori în radiani;
- calcula valori ale lui $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$ pentru puncte remarcabile, folosind reducerea la primul cadran;
- folosi formula fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pentru a calcula valoarea unei funcții trigonometrice atunci când se cunoaște valoarea celeilalte;
- recunoaște periodicitatea funcțiilor $\sin, \cos$ (perioada 2π) și $\mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$ (perioada π);
- folosi paritatea (cos pară, $\sin, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$ impare);
- aplica formulele de adunare $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$, $\mathrm{tg}(a \pm b)$ și formulele derivate ($\sin 2x, \cos 2x$);
- transforma sumele în produse și produsele în sume;
- lucra cu funcțiile trigonometrice inverse ($\arcsin, \arccos, \mathrm{arctg}, \mathrm{arcctg}$) în puncte remarcabile;
- rezolva ecuații trigonometrice de tipurile cunoscute, atât pe $\mathbb{R}$ cât și pe un interval dat.

Sarcini de sinteză

Exersează!

1 Calculează (fără calculator):

a) $\sin\frac{5\pi}{6}-\cos\frac{2\pi}{3}$;

b) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$;

c) $\sin 75^\circ+\cos 75^\circ$;

d) $\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}$;

e) $\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}$;

f) $\sin\frac{\pi}{12}+\sin\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{7\pi}{12}+\sin\frac{11\pi}{12}$;

g) $\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{7\pi}{12}+\cos\frac{11\pi}{12}$;

h) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}+\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}+\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}+\operatorname{tg}\frac{11\pi}{12}$.

2 a) Știind că $\sin x=-\frac{12}{13}$ și $x\in(\pi,3\pi/2)$, calculează $\cos x$, $\operatorname{tg}x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$.

b) Știind că $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, calculează $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin 3x$, $\cos 3x$.
Indicație: $\sin 3x=\sin(x+2x)$.

3 Demonstrează identitățile:

a) $\frac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=\operatorname{tg}2x$;

b) $\sin^4 x-\cos^4 x=-\cos 2x$;

c) $\sin^4 a+\cos^4 a=1-\frac{1}{2}\sin^2 2a$;

d) $\sin^6 a+\cos^6 a=1-\frac{3}{4}\sin^2 2a$;

e) $\operatorname{tg}a=\sin 2a-\operatorname{tg}a\cdot\cos 2a$;

f) $\frac{\operatorname{tg}a\operatorname{tg}2a}{\operatorname{tg}2a-\operatorname{tg}a}=\sin 2a$;

g) $\frac{\operatorname{tg}a}{\operatorname{tg}2a-\operatorname{tg}a}=\cos 2a$;

h) $\frac{\cos a}{1+\sin a}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)$.

4 Rezolvă pe $[0,2\pi]$:

a) $\sin x=-1/2$;

b) $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$;

c) $\sin 2x = \cos x$;

d) $\sin 2x = 0$;

e) $\cos 2x = 0$;

f) $\cos 2x = \cos x$;

g) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$;

h) $2\sin 2x + 2\sin x - 2\cos x - 1 = 0$;

i) $\sin 3x = 2\sin x$.

5 ☆ **Portofoliu.** Rezolvă în $\mathbb{R}$:

a) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$;
Indicație: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \pi/4)$.

b) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$.

6 (*Cardinalul unei mulțimi*) Folosind periodicitatea funcției sin, determină câte elemente distincte are mulțimea:

$$M = \left\{ \sin \frac{n\pi}{6} : n \in \mathbb{N},\ 0 \leq n \leq 12 \right\}.$$

Indicație: listează valorile $\sin(0), \sin(\pi/6), \sin(2\pi/6), \ldots, \sin(12\pi/6)$ și elimină valorile care se repetă.

7 (*Interpretare grafică*) Pe același reper, în intervalul $[0, 2\pi]$:

a) Schițează graficele funcțiilor $f(x) = \sin x$ și $g(x) = \cos x$.

b) Identifică din grafic toate punctele unde $\sin x = \cos x$.

c) Verifică algebric că aceste puncte sunt $x = \pi/4$ și $x = 5\pi/4$.

d) Determină valorile lui x pentru care $\sin x \leq \cos x$, respectiv $\sin x \geq \cos x$. Verifică aceste valori folosind definițiile funcțiilor sin sau cos pe cercul trigonometric.

8 (*Aplicație fizică*) Din cauza mareei, nivelul apei la o plajă variază după funcția

$$h(t) = 3 + 2\sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right),$$

unde h este înălțimea apei (în metri), iar t este timpul (în ore) măsurat de la miezul nopții.

a) Care este înălțimea maximă a mareei? La ce ore se atinge?

b) Care este înălțimea minimă? La ce ore?

c) Care este perioada mareei (în ore)?

d) În ce intervale $h(t) \geq 4$ m (mareea înaltă)?

Evaluare — U6

45 de minute · 90 p + 10 p din oficiu

Subiectul I (25 de puncte)

1. **(10 p)** Punctul M asociat lui $t = \dfrac{5\pi}{4}$ se află în cadranul:

☐ I ☐ II ☐ III ☐ IV

2. **(15 p)** Asociază fiecărei expresii din coloana A valoarea ei din coloana B.

A (expresia)	B (valoarea)
1) $\sin\dfrac{5\pi}{6}$	a) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
2) $\cos\dfrac{4\pi}{3}$	b) $\dfrac{1}{2}$
3) $\sin\dfrac{5\pi}{4}$	c) 0
4) $\cos\dfrac{\pi}{2}$	d) $-\dfrac{1}{2}$

Subiectul II (30 de puncte)

3. **(15 p)** Știind că $\cos x = \dfrac{3}{5}$ și $x \in (-\pi/2, 0)$, completează:

$\sin x =$ ☐

$\operatorname{tg} x =$ ☐

$\sin 2x =$ ☐

$\cos 2x =$ ☐

4. **(15 p)** Calculează:

$\sin 75^\circ \cdot \cos 15^\circ - \cos 75^\circ \cdot \sin 15^\circ =$ ☐

$\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) =$ ☐

$\sin 15^\circ + \sin 75^\circ =$ ☐

Subiectul III (35 de puncte)

5. **(15 p)** Demonstrează identitatea:

$$\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \operatorname{tg} 2x.$$

Vor fi notate distinct:

- prelucrarea numărătorului ..... 5 puncte;
- prelucrarea numitorului ..... 5 puncte;
- simplificarea și concluzia ..... 5 puncte.

6. **(20 p)** Rezolvă pe $[0, 2\pi]$ ecuația:

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Apoi rezolvă următoarea problemă de modelare: elongația (abaterea de la poziția de echilibru) a unui punct care vibrează este $y(t) = 5\sin(\pi t/4)$ (cm, t în secunde).

a) Care este amplitudinea vibrației (valoarea maximă a elongației)?

b) La ce momente $t \in [0, 8]$ elongația atinge valoarea maximă?

Vor fi notate distinct:

- rezolvarea ecuației de gradul al doilea în $\sin x$ ..... 6 puncte;
- determinarea soluțiilor pe $[0, 2\pi]$ ..... 6 puncte;
- determinarea amplitudinii ..... 4 puncte;
- determinarea momentelor în care se atinge maximul ..... 4 puncte.

Notă: 10 puncte se acordă din oficiu. Total: 100 de puncte. Timp de lucru: 45 de minute.

Exersezi, corectezi, progresezi

Pentru fiecare dintre cele două probleme de la subiectul III, ai aici sarcini pe trei niveluri: **Ameliorare**, **Echivalent** și **Dezvoltare**. În funcție de rezultatul obținut la test, începe cu nivelul potrivit și continuă cu următoarele.

Pentru subiectul III, itemul 5 (identitate trigonometrică)

Ameliorare

Pas cu pas, refă rezolvarea.

1. Aplică formula $\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$ pentru a transforma:
   a) $\sin 7x+\sin 5x$;
   b) $\sin 4x+\sin 2x$;
   c) $\sin 3x+\sin x$.
2. Aplică formula $\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$ pentru:
   a) $\cos 7x+\cos 5x$;
   b) $\cos 4x+\cos 2x$.
3. În identitatea $\dfrac{\sin 7x+\sin 5x}{\cos 7x+\cos 5x}=\operatorname{tg}?$, ce ar trebui să scrii în locul semnului de întrebare?

Echivalent

Demonstrează identitatea:

$$\frac{\sin 5x+\sin 7x}{\cos 5x+\cos 7x}=\operatorname{tg}6x.$$

Dezvoltare

Demonstrează identitatea:

$$\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=\operatorname{tg}2x.$$

Indicație: grupează $(\sin x+\sin 3x)+\sin 2x$ și folosește formulele.

Pentru subiectul III, itemul 6 (ecuație și modelare)

Ameliorare

Pas cu pas.

4 Cu substituția $u = \sin x$, ecuația $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ devine:
$2u^2 + 3u + 1 = 0 \implies u = \square$ sau $u = \square$.

5 Pentru fiecare valoare a lui u găsită, rezolvă ecuația $\sin x = u$ pe $[0, 2\pi]$.

6 Pentru funcția $f(t) = 3\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ (oscilația unui pendul):

a) Care este amplitudinea (valoarea maximă)?

b) La ce moment $t > 0$ se atinge prima oară maximul?

Echivalent

Rezolvă pe $[0, 2\pi]$ ecuația:

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0.$$

Apoi rezolvă problema: temperatura într-un experiment este modelată de $T(t) = 20 + 5\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ (°C, t în ore).

a) Determină temperatura maximă și temperatura minimă.

b) Pe ce intervale din $[0, 24]$ temperatura este sub 22,5 °C?

Dezvoltare

Rezolvă în $\mathbb{R}$:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1.$$

Apoi rezolvă problema: nivelul apei într-un golf variază, din cauza mareelor, după formula $h(t) = 5 + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ (m, t în ore).

a) Scrie $h(t)$ sub forma $5 + R\sin(\omega t + \varphi)$.

b) Determină înălțimea maximă și momentele când se atinge.

Autoevaluare

Bifează enunțurile care descriu ce poți face singur, fără ajutor:

- ☐ Pot localiza pe cercul trigonometric punctul asociat unui număr real sau unui unghi dat în grade ori în radiani.
- ☐ Cunosc valorile lui $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$ în puncte remarcabile $(0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2)$.
- ☐ Aplic reducerea la primul cadran pentru a calcula valori în alte cadrane.
- ☐ Folosesc formula fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pentru a calcula valoarea unei funcții trigonometrice atunci când cunosc valoarea celeilalte.
- ☐ Cunosc periodicitatea: $\sin, \cos$ au $T = 2\pi$, iar $\mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$ au $T = \pi$.
- ☐ Recunosc paritatea: cos pară; $\sin, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$ impare.
- ☐ Aplic formulele de adunare $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$, $\mathrm{tg}(a \pm b)$.
- ☐ Folosesc formulele pentru argumentul dublu $(\sin 2x, \cos 2x, \mathrm{tg}\, 2x)$ și pe cele pentru semiunghi.
- ☐ Transform sumele în produse și produsele în sume.
- ☐ Lucrez cu funcțiile inverse $\arcsin, \arccos, \mathrm{arctg}, \mathrm{arcctg}$ în puncte remarcabile.
- ☐ Rezolv ecuații elementare $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}\, x = a$, atât pe $\mathbb{R}$ cât și pe $[0, 2\pi]$.
- ☐ Rezolv ecuații de forma $\sin f(x) = \sin g(x)$, $\cos f(x) = \cos g(x)$.
- ☐ Rezolv ecuații reductibile la ecuații de gradul al doilea (prin substituția $u = \sin x$ sau $u = \cos x$).
- ☐ Rezolv ecuații de forma $a \sin x + b \cos x = c$.

Cum interpretezi rezultatul?

- Dacă ai bifat **12–14 enunțuri**: stăpânești conținutul unității. Treci cu încredere la U7.
- Dacă ai bifat **8–11 enunțuri**: ești pe drumul cel bun. Reia sarcinile de tip „Echivalent” din secțiunea „Exersezi, corectezi, progresezi”.
- Dacă ai bifat **0–7 enunțuri**: solicită sprijinul profesorului. Reia sarcinile de tip „Ameliorare” din secțiunea „Exersezi, corectezi, progresezi” împreună cu un coleg.

Reflectează:

- Cum ți s-a părut trecerea de la trigonometria din triunghi (gimnaziu) la trigonometria pe cercul trigonometric?
- Care imagine te ajută cel mai mult: cercul trigonometric, graficele $\sin$ / $\cos$ sau tabelul de valori?
- Care formulă ți se pare cea mai utilă pentru rezolvarea de probleme: cea fundamentală, formulele de adunare sau cele de transformare?
- În ce situații din viața reală ai putea recunoaște o trigonometrie ascunsă?

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE

U7

Aplicații ale trigonometriei în geometrie. Relații metrice

> *„Geometria este arta de a raționa corect pe figuri incorect desenate.”*
>
> *— Henri Poincaré*

Lecțiile unității

- L7.1 — Teorema cosinusului
- L7.2 — Teorema sinusurilor
- L7.3 — Rezolvarea triunghiurilor
- L7.4 — Raza cercului înscris și raza cercului circumscris. Aria triunghiului
- L7.5 — Teorema bisectoarei. Relația lui Stewart
- L7.6 — Concurență și coliniaritate: teoremele lui Menelaus și Ceva
- Recapitulare · Evaluare · Exersezi, corectezi, progresezi · Autoevaluare

Ce vei învăța

- să calculezi laturi și unghiuri cu teorema cosinusului și teorema sinusurilor;
- să rezolvi triunghiuri;
- să calculezi arii și razele cercurilor înscris și circumscris;
- să folosești teorema bisectoarei, relația lui Stewart, teoremele lui Menelaus și Ceva;
- să modelezi situații practice de măsurare indirectă.



Lecția L7.1

Teorema cosinusului

Amintește-ți!

La gimnaziu ai învățat *teorema lui Pitagora*: într-un triunghi dreptunghic cu catetele b, c și ipotenuza a, are loc $a^2 = b^2 + c^2$.

1. Calculează ipotenuza unui triunghi dreptunghic cu catetele 3 cm și 4 cm.
2. Discută cu colegul: ce se întâmplă cu relația $a^2 = b^2 + c^2$ dacă triunghiul *nu* este dreptunghic? Ar fi a^2 mai mare sau mai mic decât $b^2 + c^2$? De ce ar depinde?

Observă și descoperă!

Construiește pe o foaie trei triunghiuri:

- Triunghiul T_1: cu laturile $b = 4$ cm, $c = 5$ cm, unghiul dintre ele $A = 30^\circ$. Măsoară latura opusă a.
- Triunghiul T_2: cu aceleași laturi b, c, dar unghiul $A = 90^\circ$. Calculează a folosind teorema lui Pitagora.
- Triunghiul T_3: cu aceleași laturi, dar unghiul $A = 150^\circ$. Măsoară a.

3. Compară cele trei valori ale lui a. Ce observi? Cum variază a în funcție de unghiul A?
4. Discută cu colegul: există vreo formulă care leagă a, b, c și *cosinusul* unghiului A, valabilă pentru orice triunghi?

★ Important!

Teorema cosinusului. Într-un triunghi ABC cu laturile $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ (laturile sunt notate cu litera mică a vârfului opus):

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.}$$

Analog:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B, \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Demonstrație (cazul unghiului A ascuțit). Considerăm înălțimea din C pe dreapta AB și fie H piciorul ei. Atunci:

- în triunghiul dreptunghic AHC: $AH = b\cos A$, $CH = b\sin A$;
- în triunghiul dreptunghic BHC, aplicând teorema lui Pitagora: $a^2 = BH^2 + CH^2$ (dacă $H = B$, relația este evidentă, deoarece $BH = 0$ și $CH = CB = a$).

Dacă unghiul B nu este obtuz, H se află pe latura AB ($H = B$ când $B = 90°$) și $BH = AB - AH = c - b\cos A$; dacă B este obtuz, H este pe prelungirea lui AB dincolo de B și $BH = b\cos A - c$. În ambele cazuri $BH^2 = (c - b\cos A)^2$. Așadar:

$$a^2 = (c - b\cos A)^2 + (b\sin A)^2 = c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A + b^2\sin^2 A.$$

Folosind $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$, obținem:

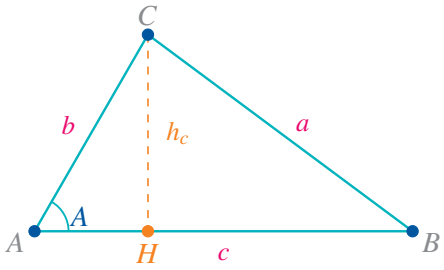
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A. \qquad \square$$

(Cazul unghiului A obtuz se demonstrează analog; înălțimea cade pe prelungirea laturii AB.)

Caz particular: $A = 90°$**.** Atunci $\cos A = 0$ și formula devine:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{(teorema lui Pitagora).}$$

Așadar teorema cosinusului este o *generalizare* a teoremei lui Pitagora.



★ Important!

Teorema cosinusului — formă inversă (calculul cosinusului unui unghi). Dacă cunoaștem laturile a, b, c ale unui triunghi, putem afla cosinusul oricărui unghi. Din teorema cosinusului:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Consecință importantă (natura unui triunghi). Privește numărătorul $b^2 + c^2 - a^2$:

- dacă $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, atunci $\cos A > 0$, deci A este *ascuțit*;
- dacă $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, atunci $\cos A = 0$, deci $A = 90°$ (triunghi dreptunghic în A);
- dacă $b^2 + c^2 - a^2 < 0$, atunci $\cos A < 0$, deci A este *obtuz*.

Aplicație: natura triunghiului cunoscând laturile. Pentru a stabili dacă un triunghi este ascuțitunghic, dreptunghic sau obtuzunghic, e suficient să comparăm pătratul laturii *celei mai mari* cu suma pătratelor celorlalte două:

- $a^2_{\max} <$ suma pătratelor celorlalte două laturi $\Rightarrow$ triunghi ascuțitunghic;
- $a^2_{\max} =$ suma pătratelor celorlalte două laturi $\Rightarrow$ triunghi dreptunghic;
- $a^2_{\max} >$ suma pătratelor celorlalte două laturi $\Rightarrow$ triunghi obtuzunghic.

Bine de știut!

Când folosesc teorema cosinusului?

- **LUL** (latură-unghi-latură): cunosc două laturi și unghiul dintre ele $\Rightarrow$ aflu a treia latură.
- **LLL** (latură-latură-latură): cunosc toate cele trei laturi $\Rightarrow$ aflu oricare unghi.

Aplicație digitală

Folosește **GeoGebra**.

- Construiește un triunghi ABC cu vârfuri mobile.
- Marchează lungimile laturilor a, b, c și unghiurile A, B, C.
- Verifică numeric teorema cosinusului: calculează a^2 și $b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Sunt egale, indiferent cum miști vârfurile?

Exersează!

Aplicarea teoremei (LUL: latură-unghi-latură)

5 Într-un triunghi ABC, $b = 5$ cm, $c = 8$ cm, $A = 60^\circ$. Calculează latura a.
Model de rezolvare: $a^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 89 - 80 \cdot (1/2) = 49$. Deci $a = 7$ cm.

6 Într-un triunghi ABC, $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $C = 120^\circ$. Calculează latura c.

7 Determină a treia latură:

a) $b = 3, c = 4, A = 90^\circ$;

b) $a = 7, b = 5, C = 60^\circ$;

c) $a = 10, c = 6, B = 45^\circ$.

Calculul unui unghi (LLL: latură-latură-latură)

8 Într-un triunghi cu laturile $a = 7, b = 5, c = 6$, calculează $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$.

9 Determină natura triunghiului cu laturile:

a) $5, 12, 13$;

b) $4, 6, 8$;

c) $7, 7, 5$;

d) $10, 6, 7$.

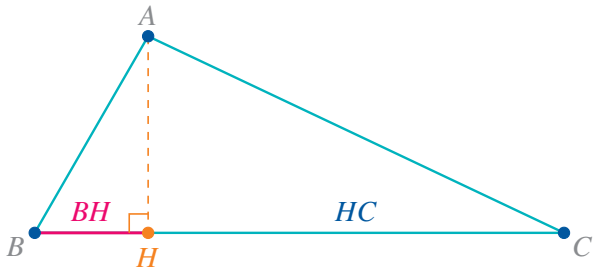
10 Determină proiecțiile laturilor AB și AC pe dreapta BC în triunghiul ABC dacă:

a) $AB = 5, AC = 6, BC = 8$;

b) $AB = 7, AC = 13, BC = 8$;

c) $AB = 7, AC = 13, A = 60°$;

d) $AB = 7, AC = 13, A = 120°$.



11 Determină $a \in \mathbb{N}$ dacă $a, a+1, a+2$ sunt laturile unui triunghi obtuzunghic.

12 Arată că, dacă în triunghiul ABC are loc $a \geq b$, atunci $a + h_a \geq b + h_b$.

13 Arată că în orice triunghi ABC are loc

$$\frac{1}{b+a} + \frac{1}{c+a} = \frac{3}{a+b+c}$$

dacă și numai dacă $A = \frac{\pi}{3}$.

Aplicații practice (măsurători indirecte)

14 Doi turiști pleacă din același punct. Primul merge 5 km în direcția nord, al doilea merge 7 km într-o direcție care formează un unghi de 60° cu nordul (spre est). La ce distanță sunt cei doi turiști?

15 Un avion decolează de pe un aeroport și zboară în linie dreaptă 300 km, apoi își schimbă direcția cu 30° spre stânga și mai zboară, tot în linie dreaptă, 200 km. La ce distanță de aeroport se află atunci avionul?

16 ☆ **Portofoliu.** Într-un paralelogram $ABCD$, $AB = 8$ cm, $AD = 6$ cm, $A = 60°$. Calculează lungimile diagonalelor AC și BD.

Probleme de demonstrație

17 Demonstrează că în orice triunghi ABC au loc relațiile:

a) $b\cos C - c\cos B = \frac{b^2 - c^2}{a}$;

b) $(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C = a+b+c$.

18 Arată că, dacă în triunghiul ABC are loc $a = 2b\cos C$, atunci triunghiul este isoscel.

19 Este adevărată propoziția: „Triunghiul ABC este isoscel dacă și numai dacă $\cos 2B = \cos 2C$”? Justifică răspunsul dat.

20 Este adevărată propoziția: „Triunghiul ABC este dreptunghic dacă și numai dacă $\sin B = \cos C$”? Justifică răspunsul dat.

Lecția L7.2

Teorema sinusurilor

Amintește-ți!

La gimnaziu ai învățat că, într-un triunghi, *latura mai mare se opune unghiului mai mare*. Dar oare există o relație *cantitativă* (numerică) între lungimea unei laturi și măsura unghiului opus ei?

1 Discută cu colegul: în triunghiul cu laturile $a=6, b=4, c=5$, care este cel mai mare unghi? (Indicație: privește latura cea mai mare.)

Observă și descoperă!

Construiește un triunghi ABC pe o foaie. Măsoară laturile a,b,c și unghiurile A,B,C.

2 Calculează rapoartele:

$$\frac{a}{\sin A}, \qquad \frac{b}{\sin B}, \qquad \frac{c}{\sin C}.$$

Ce observi?

3 Repetă pentru un triunghi de altă formă. Constatarea se păstrează?

4 Discută cu colegul: ce semnificație geometrică ar putea avea valoarea comună a celor trei rapoarte?

★ Important!

Teorema sinusurilor. Într-un triunghi ABC cu laturile a,b,c, unghiurile A,B,C și raza cercului circumscris R:

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.}$$

Demonstrație (cazul unghiului A ascuțit). Considerăm cercul circumscris triunghiului ABC, cu centrul O și raza R. Pentru a demonstra $\frac{a}{\sin A}=2R$, construim diametrul BD (cu D pe cerc).

În triunghiul BDC:

- $BD=2R$ (diametru);
- $\angle BCD=90^\circ$ (unghi înscris într-un semicerc);
- $\angle BDC=\angle BAC=A$ (unghiuri înscrise care subîntind același arc BC).

În triunghiul dreptunghic BDC:

$$\sin(\angle BDC)=\frac{BC}{BD}=\frac{a}{2R}, \quad \text{adică} \quad \sin A=\frac{a}{2R}.$$

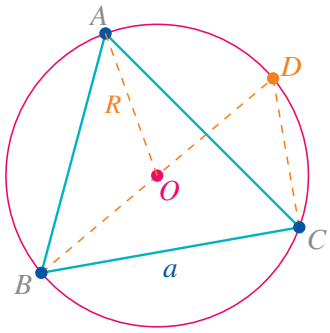
Așadar $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$.
Dacă A este obtuz, punctele A și D sunt de o parte și de alta a coardei BC, deci $\angle BDC = 180^\circ - A$ și $\sin(\angle BDC) = \sin A$; dacă $A = 90^\circ$, BC este diametru și $a = 2R$. În toate cazurile $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$. Analog se demonstrează celelalte egalități. □

Consecințe.

- $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$.
- Raportul lungimilor a două laturi este egal cu raportul sinusurilor unghiurilor opuse lor:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

- Dacă cunoaștem o latură și raza cercului circumscris, putem afla sinusul unghiului opus.



Bine de știut!

Când folosesc teorema sinusurilor?

- **ULU** (unghi-latură-unghi): cunosc două unghiuri și o latură ⇒ aflu celelalte laturi.
- **LLU** (latură-latură-unghi opus): cunosc două laturi și un unghi opus uneia ⇒ aflu unghiul opus celeilalte (atenție la ambiguitate!).
- Cunosc o latură și unghiul opus ei ⇒ aflu raza cercului circumscris.

Atenție la ambiguitate (cazul LLU). Dacă $\sin B = k$ cu $0 < k < 1$, există două unghiuri $B \in (0, \pi)$ care au $\sin B = k$: unul ascuțit și unul obtuz. Trebuie să verifici care e compatibil cu restul datelor.

Exersează!

Aplicarea teoremei sinusurilor

5 Într-un triunghi ABC, $A = 30^\circ$, $B = 45^\circ$, $a = 10$ cm. Calculează latura b.

Model de rezolvare:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow \frac{10}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} \Longrightarrow b = \frac{10 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{10 \cdot \sqrt{2}/2}{1/2} = 10\sqrt{2} \text{ cm}.$$

6 Într-un triunghi ABC, $A = 60^\circ$, $a = 6$ cm. Calculează raza R a cercului circumscris.

7 Pentru triunghiul cu $a = 8, b = 10, A = 30^\circ$, determină $\sin B$. Discută câte triunghiuri pot fi construite cu aceste date.

Determinarea razei R

8 Pentru triunghiul echilateral cu latura $a = 6$ cm, calculează raza R a cercului circumscris.

Indicație: Toate unghiurile sunt 60°. Aplică $a = 2R\sin A$.

9 Pentru triunghiul dreptunghic cu ipotenuza $c = 10$ cm, calculează R.

Indicație: Unghiul drept se opune ipotenuzei. Folosește $\sin C = \sin 90^\circ = 1$. Concluzia: în triunghiul dreptunghic, $R = c/2$ (jumătate din ipotenuză).

10 Determină R pentru triunghiul cu:

a) $a = 10$ și $\cos A = \dfrac{3}{5}$;

b) $A = \dfrac{\pi}{4}$, $B = \dfrac{\pi}{3}$ și $c = 10$;

c) $a = 10$, $b = 8$ și $C = \dfrac{\pi}{3}$;

d) $a = 10$, $b = 8$ și $C = \dfrac{2\pi}{3}$.

Modelare practică (triangulație)

11 Pentru a măsura distanța dintre două puncte A și B aflate pe maluri opuse ale unui râu, un topograf alege un punct C pe același mal cu A și măsoară:

- $AC = 50$ m;
- $\angle BAC = 75^\circ$;
- $\angle ACB = 50^\circ$.

Calculează distanța AB.

Indicație: suma unghiurilor este 180°, deci $\angle ABC = 180^\circ - 75^\circ - 50^\circ = 55^\circ$. Aplică teorema sinusurilor.

Probleme de demonstrație

12 ☆ **Portofoliu.** Într-un triunghi ABC, $\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 4 : 5$. Arată că triunghiul este dreptunghic și calculează raportul laturilor.

Indicație: folosește $a = 2R\sin A$, deci $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$. Apoi verifică dacă un triunghi cu laturile în raportul $3 : 4 : 5$ este dreptunghic.

13 Arată că, dacă în triunghiul ABC are loc $\sin A = 2\sin B\cos C$, atunci triunghiul este isoscel.

14 Notăm cu p semiperimetrul triunghiului ABC, $p = (a+b+c)/2$. Arată că, dacă $p = b\cos A + c\cos B + a\cos C$, atunci triunghiul este isoscel.

15 Arată că, dacă în triunghiul ABC are loc $p = \dfrac{3a}{2}$ și $A = \dfrac{\pi}{3}$, atunci triunghiul este echilateral.

16 Arată că, dacă în triunghiul ABC are loc $R = \dfrac{a}{2}$, atunci triunghiul este dreptunghic.

17 Demonstrează că în orice triunghi ABC au loc:

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Lecția L7.3

Rezolvarea triunghiurilor

Amintește-ți!

A *rezolva* un triunghi înseamnă a determina toate cele 6 elemente fundamentale (cele 3 laturi și cele 3 unghiuri), cunoscând doar o parte dintre ele. Din geometria de gimnaziu cunoști: două triunghiuri sunt *congruente* dacă se află într-unul dintre cazurile de congruență LLL, LUL, ULU sau, pentru triunghiurile dreptunghice, IC (ipotenuză-catetă). Aceste cazuri sunt suficiente pentru a determina un triunghi (abstracție făcând de poziția lui în plan).

1 Discută cu colegul: dacă ți se dau doar trei *unghiuri* (UUU), poți determina laturile triunghiului? De ce nu? Câte triunghiuri cu aceleași unghiuri pot exista?

★ Important!

Cazurile principale de rezolvare a triunghiurilor.

1. **Cazul LUL (latură-unghi-latură):** Cunoaștem două laturi și unghiul *dintre ele*.
   - Aplicăm *teorema cosinusului* pentru a afla a treia latură.
   - Aplicăm *teorema cosinusului* (formă inversă) sau *teorema sinusurilor* pentru celelalte unghiuri.
2. **Cazul LLL (latură-latură-latură):** Cunoaștem toate cele trei laturi.
   - Aplicăm *teorema cosinusului* (formă inversă) pentru a afla unghiurile.
   - Verificăm: $A+B+C=180^\circ$.
3. **Cazul ULU (unghi-latură-unghi):** Cunoaștem o latură și două unghiuri.
   - Calculăm al treilea unghi din $A+B+C=180^\circ$.
   - Aplicăm *teorema sinusurilor* pentru celelalte laturi.
4. **Cazul LLU (latură-latură-unghi opus):** Cunoaștem două laturi și unghiul *opus* uneia dintre ele.
   - Aplicăm *teorema sinusurilor* pentru a afla un al doilea unghi.
   - **Atenție: caz ambiguu!** Pot exista 0, 1 sau 2 triunghiuri compatibile.

★ Important!

Exemplu rezolvat (LUL). Rezolvă triunghiul ABC cu $b = 5$, $c = 8$, $A = 60^\circ$.

Soluție.

Pas 1. Latura a (teorema cosinusului):

$$a^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 89 - 40 = 49 \Rightarrow a = 7.$$

Pas 2. Unghiul B (teorema sinusurilor):

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}/2}{7} = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

Cum $b < a$ ($5 < 7$), rezultă $B < A = 60^\circ$, deci B este ascuțit: $B \approx 38{,}21^\circ$.

Pas 3. Unghiul C:

$$C = 180^\circ - A - B \approx 180^\circ - 60^\circ - 38{,}21^\circ = 81{,}79^\circ.$$

Verificare: $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$. ✓ Toate unghiurile sunt pozitive și suma lor $= 180^\circ$. ✓

★ Important!

Exemplu rezolvat (LLU — caz ambiguu). Rezolvă triunghiul ABC cu $a = 8$, $b = 10$, $A = 30^\circ$.

Soluție. Aplicăm teorema sinusurilor:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{10 \cdot 1/2}{8} = \frac{5}{8} = 0{,}625.$$

Pentru $B \in (0, \pi)$, există *două* valori posibile:

- $B_1 = \arcsin(0{,}625) \approx 38{,}68^\circ$;
- $B_2 = 180^\circ - B_1 \approx 141{,}32^\circ$.

Verificare a compatibilității (suma unghiurilor $< 180^\circ$):

- $A + B_1 = 30^\circ + 38{,}68^\circ = 68{,}68^\circ < 180^\circ$ ✓ $\Rightarrow$ triunghi T_1 valabil.
- $A + B_2 = 30^\circ + 141{,}32^\circ = 171{,}32^\circ < 180^\circ$ ✓ $\Rightarrow$ triunghi T_2 valabil.

Așadar există *două triunghiuri* compatibile cu datele!

Rezolvăm fiecare triunghi. T_1: $C_1 = 180^\circ - 30^\circ - 38{,}68^\circ \approx 111{,}32^\circ$, $c_1 = a \sin C_1 / \sin A \approx 14{,}91$ (valoarea exactă: $c_1 = 5\sqrt{3} + \sqrt{39}$). T_2: $C_2 = 180^\circ - 30^\circ - 141{,}32^\circ \approx 8{,}68^\circ$, $c_2 = a \sin C_2 / \sin A \approx 2{,}42$ (valoarea exactă: $c_2 = 5\sqrt{3} - \sqrt{39}$).

Bine de știut!

Strategia generală.

1. *Identifică tipul cazului*: LUL, LLL, ULU sau LLU.

2. *Alege teorema corespunzătoare*: cosinusului (LUL, LLL) sau sinusurilor (ULU, LLU).
3. *Verifică validitatea*: laturile pozitive, unghiurile $< 180°$, suma $= 180°$.
4. *În cazul LLU*, verifică ambele soluții posibile.

Exersează!

Cazul LUL

2 Rezolvă triunghiul cu:

a) $b = 4, c = 6, A = 90°$; b) $a = 5, b = 7, C = 60°$; c) $b = 8, c = 10, A = 45°$.

Cazul LLL

3 Rezolvă triunghiul cu laturile:

a) $a = 13, b = 14, c = 15$; b) $a = 5, b = 5, c = 8$ (triunghi isoscel); c) $a = 4, b = 5, c = 6$.

Cazul ULU

4 Rezolvă triunghiul cu:

a) $A = 30°, B = 75°, c = 12$; b) $A = 45°, B = 60°, a = 6$; c) $A = \frac{\pi}{6}, B = \frac{\pi}{4}$ și $c = 12$.

Cazul LLU (caz ambiguu)

5 Determină câte triunghiuri sunt compatibile cu datele $a = 6, b = 8, A = 30°$.

Aplicații practice

6 Un avion zboară în linie dreaptă 400 km, de la A până la B. În B își schimbă direcția cu $25°$ spre dreapta și mai zboară, în linie dreaptă, 300 km, până la C. Cât de departe este C de A? Ce unghi formează dreapta AC cu dreapta AB?

Probleme de sinteză

7 ☆ **Portofoliu.** Într-un triunghi, $a = 7$, $b = 8$ și $C = 60°$. Calculează raza cercului circumscris și aria triunghiului.

Indicație: întâi află c cu teorema cosinusului, apoi aplică $R = c/(2\sin C)$. Pentru arie, folosește formula $S = \frac{1}{2}ab\sin C$.

8 Rezolvă triunghiul ABC dacă se cunosc:

a) laturile a și b și înălțimea h_a;

b) laturile b și c și înălțimea h_a;

c) $h_a = 8$, $h_b = 10$ și unghiul ascuțit dintre h_a și h_b este $\pi/3$;

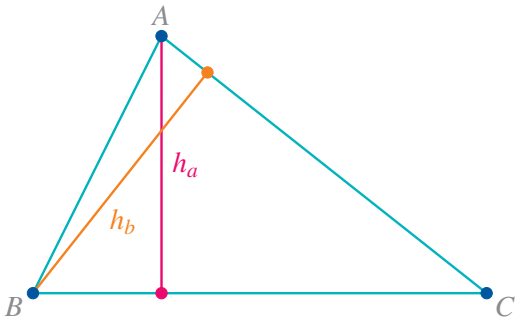
d) latura b, unghiul A și înălțimea h_a;

e) latura a, unghiul A și înălțimea h_a;

f) latura a, unghiul A și semiperimetrul p;

g) $c = 12$, $b = 20$ și $S = 40$;

h) $S = 28$, $b = 4$ și $A = \dfrac{\pi}{6}$.



Lecția L7.4

Raza cercului înscris și raza cercului circumscris. Aria triunghiului

Amintește-ți!

La gimnaziu ai învățat că:

- Aria unui triunghi este $S = \dfrac{\text{bază} \times \text{înălțime}}{2}$.
- *Cercul circumscris* unui triunghi trece prin toate cele trei vârfuri. Centrul său este intersecția mediatoarelor.
- *Cercul înscris* într-un triunghi este tangent la toate cele trei laturi. Centrul său este intersecția bisectoarelor.

1. Discută cu colegul: cum putem calcula aria unui triunghi când nu cunoaștem direct înălțimea, ci doar laturile și un unghi? Dar dacă cunoaștem doar laturile?

Observă și descoperă!

Un triunghi ABC are $a = 5$, $b = 7$ și unghiul $C = 30^\circ$.

2. Folosind formula „bază $\times$ înălțime $/2$”, cu baza $BC = a$ și înălțimea din A (notată h_a), exprimă aria S în funcție de a și h_a.
3. În triunghiul dreptunghic format de înălțime, calculează h_a în funcție de b și C.
4. Combinând rezultatele, arată că $S = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$. Aplică pentru valorile date.
5. Discută cu colegul: avem deci o formulă pentru aria unui triunghi care folosește două laturi și unghiul dintre ele. Ce facem dacă nu cunoaștem un unghi, ci doar laturile?

★ Important!

Formule pentru aria unui triunghi.

(F1) Cu bază și înălțime:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c.$$

(F2) Cu două laturi și unghiul dintre ele:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B.}$$

Justificare. Înălțimea din A pe latura BC este $h_a = b\sin C$ (din triunghiul dreptunghic format). Deci $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C$.

(F3) Formula lui Heron (cu cele trei laturi). Notăm *semiperimetrul* $p = (a+b+c)/2$. Atunci:

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.}$$

(F4) Cu raza cercului circumscris:

$$\boxed{S = \frac{abc}{4R}.}$$

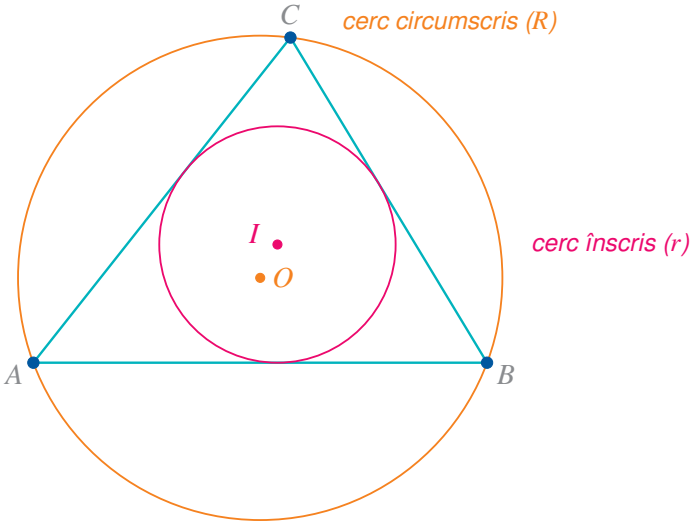
Justificare. Din teorema sinusurilor, $\sin C = \frac{c}{2R}$. Înlocuim în $S = \frac{1}{2}ab\sin C$: $S = \frac{abc}{4R}$.

(F5) Cu raza cercului înscris:

$$\boxed{S = p \cdot r,}$$

unde p este semiperimetrul și r raza cercului înscris.

Justificare. Centrul I al cercului înscris este la distanța r de fiecare latură. Triunghiul ABC se descompune în trei triunghiuri, IAB, IBC și ICA, cu vârful comun I, având ariile $\frac{1}{2}cr$, $\frac{1}{2}ar$, respectiv $\frac{1}{2}br$. Suma: $S = \frac{1}{2}(a+b+c)r = pr$.



★ Important!

Determinarea razei cercului circumscris R. Din teorema sinusurilor:

$$\boxed{R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}.}$$

Sau, folosind aria: $R = \dfrac{abc}{4S}$.

Determinarea razei cercului înscris r. Din formula $S = pr$:

$$\boxed{r = \frac{S}{p}.}$$

Cazul triunghiului echilateral. Pentru un triunghi echilateral cu latura a:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

(Observă: $R = 2r$ pentru triunghiul echilateral.)

Bine de știut!

Care formulă aleg pentru aria triunghiului?

- Cunosc o bază și înălțimea corespunzătoare ei $\Rightarrow$ **F1**.
- Cunosc două laturi și unghiul dintre ele $\Rightarrow$ **F2**.
- Cunosc cele trei laturi $\Rightarrow$ **F3** (Heron).
- Cunosc cele trei laturi și raza cercului circumscris $\Rightarrow$ **F4** ($S = abc/(4R)$).
- Cunosc semiperimetrul și raza cercului înscris $\Rightarrow$ **F5** ($S = pr$).

Exersează!

Calculul ariei

6 Calculează aria unui triunghi cu:

a) $a = 6, b = 8, C = 30^\circ$ (folosește F2);

b) $a = 5, b = 6, c = 7$ (folosește F3);

c) $a = 13, b = 14, c = 15$ (folosește F3).

Model de rezolvare a): $S = (1/2) \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ = 24 \cdot 1/2 = 12$.
Model de rezolvare b): $p = (5+6+7)/2 = 9$. $S = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{216} = 6\sqrt{6}$.

Calculul razelor

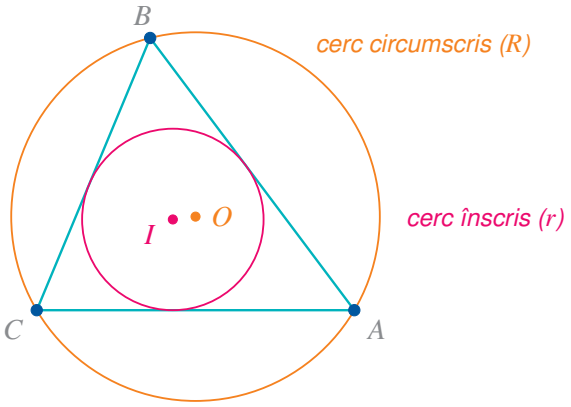
7 Pentru triunghiul cu $a = 13, b = 14, c = 15$:

a) Calculează aria S (folosește formula lui Heron).

b) Calculează raza R a cercului circumscris (folosește $R = abc/(4S)$).

c) Calculează raza r a cercului înscris (folosește $r = S/p$).

Model de rezolvare: $p = 21$. $S = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84$. $R = (13 \cdot 14 \cdot 15)/(4 \cdot 84) = 2730/336 = 65/8$. $r = 84/21 = 4$.



8 Calculează R și r în triunghiul ABC dacă se cunosc:

a) $a = 10$, $b = 14$ și $B = \dfrac{\pi}{3}$;

b) $c = 12$, $A = \dfrac{\pi}{4}$ și $B = \dfrac{\pi}{3}$;

c) $b = 12$, $A = \dfrac{\pi}{3}$ și $B = \dfrac{\pi}{6}$.

9 Pentru triunghiul echilateral cu latura $a = 6$, calculează aria, R și r.

10 Demonstrează că în orice triunghi ABC au loc relațiile:

a) $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$;

b) $r = (p-a)\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$;

c) $p = 4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$;

d) $1 - \dfrac{r}{2R} = \sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2}$.

Aplicații

11 Un teren în formă de triunghi are laturile de 40 m, 60 m și 80 m. Calculează aria terenului. Câți pomi pot fi plantați la o densitate de 25 de pomi pe ar (1 ar = 100 m²)?

12 Într-un triunghi ABC, $a = 6, b = 8, c = 10$. Determină natura triunghiului. Calculează raza R folosind o metodă convenabilă.

Indicație: $a^2 + b^2 = 36 + 64 = 100 = c^2$ — triunghi dreptunghic în C. Pentru un triunghi dreptunghic, $R = c/2$ (jumătate din ipotenuză).

13 ☆ **Portofoliu.** Pentru un triunghi cu $r = 2$ și $R = 5$, calculează raportul r/R. (Inegalitatea lui Euler: pentru orice triunghi, $R \geq 2r$, cu egalitate doar la triunghiul echilateral.) Compară raportul obținut cu raportul $r/R = 1/2$ al triunghiului echilateral.

Lecția L7.5

Teorema bisectoarei. Relația lui Stewart

Amintește-ți!

La gimnaziu ai învățat că *bisectoarea* unui unghi împarte unghiul în două unghiuri congruente. Bisectoarele unui triunghi se intersectează într-un singur punct, numit *centrul cercului înscris*.

1. Construiește un triunghi ABC și bisectoarea unghiului A, care intersectează latura BC într-un punct D. Măsoară BD și DC. Apoi măsoară laturile $b = AC$ și $c = AB$.
2. Calculează rapoartele $\frac{BD}{DC}$ și $\frac{c}{b}$. Ce observi?

★ Important!

Teorema bisectoarei. Bisectoarea interioară a unghiului A al unui triunghi ABC intersectează latura BC într-un punct D. Atunci:

$$\boxed{\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b} = \frac{AB}{AC}.}$$

Demonstrație. Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiurile ABD și ADC.

În $\triangle ABD$: $\dfrac{BD}{\sin(\angle BAD)} = \dfrac{AB}{\sin(\angle ADB)}$.

În $\triangle ADC$: $\dfrac{DC}{\sin(\angle DAC)} = \dfrac{AC}{\sin(\angle ADC)}$.

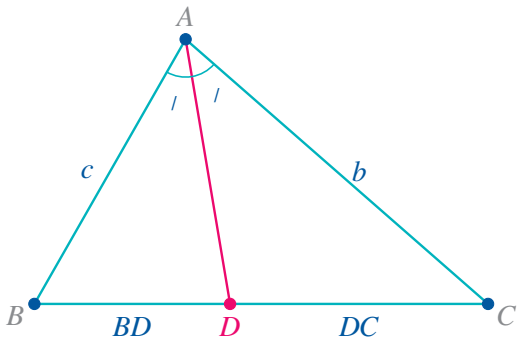
Cum AD este bisectoare, $\angle BAD = \angle DAC$ și deci $\sin(\angle BAD) = \sin(\angle DAC)$. Cum $\angle ADB$ și $\angle ADC$ sunt suplementare ($\angle ADB + \angle ADC = 180^\circ$), avem $\sin(\angle ADB) = \sin(\angle ADC)$.

Împărțind cele două relații:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{\sin(\angle DAC)}{\sin(\angle BAD)} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin(\angle ADC)}{\sin(\angle ADB)} \Longrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}. \qquad \square$$

Corolar (lungimile BD și DC în funcție de laturi). Cum $BD + DC = a$ și $BD/DC = c/b$, obținem:

$$BD = \frac{ac}{b+c}, \qquad DC = \frac{ab}{b+c}.$$



★ Important!

Lungimea bisectoarei. Notăm cu ℓ_a lungimea bisectoarei AD. Atunci:

$$\boxed{\ell_a^2 = bc\left[1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right] = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2}.}$$

(Demonstrația folosește relația lui Stewart de mai jos.)

Relația lui Stewart. Fie D un punct pe latura BC a unui triunghi ABC, cu $BD = m$ și $DC = n$. Notăm $AD = d$. Atunci:

$$\boxed{b^2m + c^2n - d^2a = amn,}$$

sau echivalent:

$$d^2 = \frac{b^2m + c^2n}{a} - mn.$$

Demonstrație (idee). Aplicăm teorema cosinusului în triunghiurile ABD și ACD pentru unghiul $\angle ADB$ (resp. $\angle ADC$). Folosim faptul că $\cos(\angle ADC) = -\cos(\angle ADB)$ (unghiuri suplementare). Eliminând $\cos(\angle ADB)$, obținem relația lui Stewart.

Aplicații ale relației lui Stewart.

(1) Lungimea medianei. Mediana din A pe latura BC are piciorul în mijlocul lui BC, deci $m = n = a/2$. Înlocuind:

$$m_a^2 = \frac{b^2(a/2) + c^2(a/2)}{a} - \frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}.$$

(2) Lungimea bisectoarei (deducere). Pentru bisectoarea din A, $m = ac/(b+c)$ și $n = ab/(b+c)$. Înlocuind în relația lui Stewart, obținem formula de mai sus pentru ℓ_a.

Bine de știut!

Cum aleg formula?

- Pentru *lungimile segmentelor BD și DC în care bisectoarea împarte latura BC*: teorema bisectoarei (raportul c/b).

- Pentru *lungimea unei ceviene oarecare* (segment de la un vârf la latura opusă): relația lui Stewart.
- Pentru *mediană*: caz particular al relației lui Stewart, cu $m = n = a/2$.
- Pentru *bisectoare*: caz particular al relației lui Stewart, cu $m = ac/(b+c), n = ab/(b+c)$.

Exersează!

Teorema bisectoarei

3 Într-un triunghi ABC cu $b = 6, c = 4, a = 8$, bisectoarea din A intersectează BC în D. Calculează BD și DC.

Model de rezolvare: $BD/DC = c/b = 4/6 = 2/3$. Cum $BD + DC = 8$: $BD = 8 \cdot 2/5 = 16/5$, $DC = 8 \cdot 3/5 = 24/5$.

4 Într-un triunghi cu $a = 10, b = 7, c = 5$, calculează lungimea segmentului BD (unde D este piciorul bisectoarei din A).

Lungimea medianei și a bisectoarei

5 Pentru triunghiul cu $a = 13, b = 14, c = 15$:

a) Calculează lungimea medianei din A (m_a).

b) Calculează lungimea bisectoarei din A (ℓ_a).

Model de rezolvare a): $m_a^2 = (2 \cdot 196 + 2 \cdot 225 - 169)/4 = (392 + 450 - 169)/4 = 673/4$. Deci $m_a = \sqrt{673}/2$.

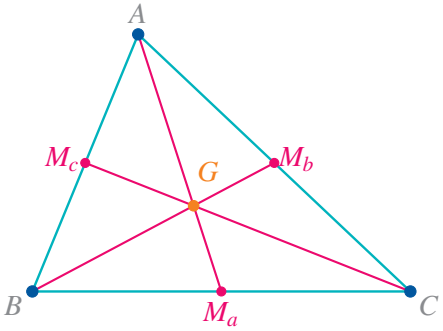
6 Rezolvă triunghiul ABC dacă se cunosc:

a) lungimile medianelor m_a, m_b și m_c;

b) lungimile laturilor b și c și lungimea medianei m_a;

c) lungimile laturilor a și b și lungimea medianei m_a;

d) lungimea laturii a, lungimea înălțimii h_a și lungimea medianei m_a.



Aplicații

7 Într-un triunghi ABC, D este pe BC cu $BD = 3, DC = 4$. Dacă $AB = 5$ și $AC = 7$, calculează AD folosind relația lui Stewart.

Indicație: $a=7, m=3, n=4, b=7, c=5$. Aplică $d^2=(b^2m+c^2n)/a-mn$.

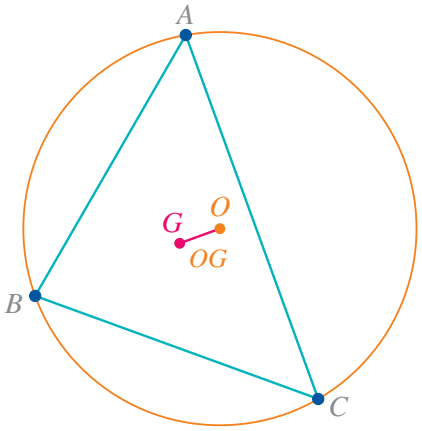
8 ☆ **Portofoliu.** Demonstrează că, într-un triunghi, $4(m_a^2+m_b^2+m_c^2)=3(a^2+b^2+c^2)$.

Indicație: folosește formulele $m_a^2=(2b^2+2c^2-a^2)/4$ și analoagele.

9 Demonstrează că în orice triunghi ABC are loc relația

$$OG^2=R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2),$$

unde O este centrul cercului circumscris și G este centrul de greutate.



Lecția L7.6

Concurență și coliniaritate: teoremele lui Menelaus și Ceva

Amintește-ți!

La gimnaziu ai învățat că:

- Trei *puncte* sunt *coliniare* dacă se află pe aceeași dreaptă.
- Trei *drepte* sunt *concurente* dacă au un punct comun.

1. Dă exemple de drepte concurente într-un triunghi, pe care le-ai studiat la gimnaziu.
2. Discută cu colegul: există o metodă *algebrică* pentru a stabili dacă trei puncte sunt coliniare sau dacă trei drepte sunt concurente, fără să ne bazăm pe construcție?

★ Important!

Teorema lui Menelaus (criteriu de coliniaritate). Fie $\triangle ABC$ și o dreaptă d care nu trece prin niciun vârf al triunghiului și care intersectează:

- dreapta BC în punctul A';
- dreapta CA în punctul B';
- dreapta AB în punctul C'.

Atunci:

$$\boxed{\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1.}$$

Reciproc. Fie A', B', C' puncte situate pe dreptele BC, CA, AB, astfel încât unul singur sau toate cele trei să se afle pe prelungirile laturilor. Dacă

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1,$$

atunci punctele A', B', C' sunt *coliniare*.

Notă. Lucrăm cu rapoarte de lungimi (pozitive). Pentru reciprocă este esențială condiția ca unul sau toate cele trei puncte să fie pe prelungiri: de exemplu, pentru mijloacele laturilor produsul este 1, dar punctele nu sunt coliniare.

★ **Important!**

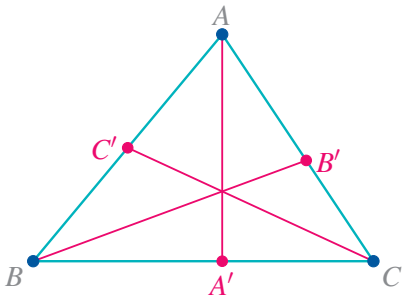
Teorema lui Ceva (criteriu de concurență). Fie $\triangle ABC$ și trei puncte $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$. Cevienele AA', BB', CC' sunt *concurente* dacă și numai dacă:

$$\boxed{\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.}$$

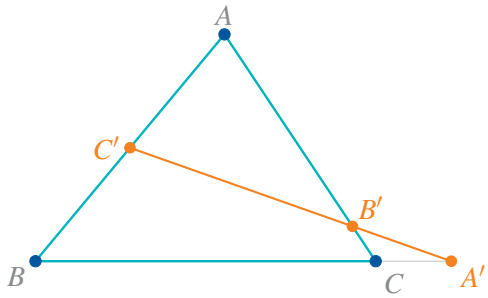
Comparație importantă. Atât teorema lui Menelaus, cât și teorema lui Ceva folosesc *aceeași expresie*. Diferența:

- Teorema lui Menelaus: punctele A', B', C' sunt pe *laturile unui triunghi (sau pe prelungirile lor)* și sunt *coliniare*; expresia $= 1$.
- Teorema lui Ceva: cevienele AA', BB', CC' sunt *concurente*; expresia $= 1$.

În această lecție lucrăm cu *rapoarte de lungimi*. Atenție: în cazul teoremei lui Menelaus, întotdeauna unul sau toate cele trei puncte se află pe prelungirile laturilor (o dreaptă care nu trece prin vârfuri intersectează interiorul a exact două laturi sau al niciuneia).



Ceva: cevienele concurente



Menelaus: A', B', C' coliniare

★ **Important!**

Aplicații clasice.

(1) Concurența medianelor. Medianele unui triunghi sunt concurente într-un punct numit *centroid* (sau *centrul de greutate*). Aplicăm teorema lui Ceva: pentru mediane, A', B', C' sunt mijloacele laturilor, deci $A'B = A'C, B'C = B'A, C'A = C'B$. Produsul rapoartelor: $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. ✓

(2) Concurența bisectoarelor. Aplicăm teorema lui Ceva, folosind teorema bisectoarei: $A'B/A'C = c/b$, $B'C/B'A = a/c$, $C'A/C'B = b/a$. Produsul: $\frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1$. ✓

(3) Concurența înălțimilor. Într-un triunghi ascuțitunghic (picioarele înălțimilor se află pe laturi), la fel, folosind cosinusurile, se arată că produsul rapoartelor în care înălțimile împart laturile opuse este 1.

Bine de știut!

Cum aleg între Menelaus și Ceva?

- Vrei să *demonstrezi că trei drepte sunt concurente* (sau să găsești punctul lor comun) ⇒ **Ceva**.
- Vrei să *demonstrezi că trei puncte sunt coliniare* (sau să stabilești dacă o dreaptă trece printr-un anumit punct) ⇒ **Menelaus**.

Atenție. Ambele teoreme au *și reciprocă*, dar contează poziția punctelor: dacă produsul $= 1$ și unul sau toate cele trei puncte sunt pe prelungirile laturilor, atunci punctele sunt coliniare (Menelaus); dacă produsul $= 1$ și toate cele trei puncte sunt pe laturi, atunci cevienele sunt concurente (Ceva).

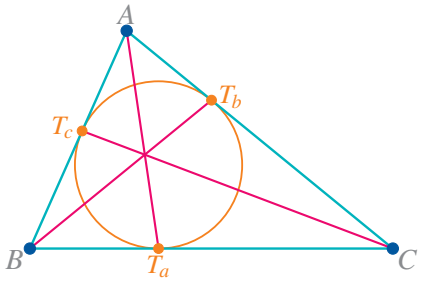
Exersează!

Aplicarea teoremei lui Ceva

3 Folosind teorema lui Ceva, demonstrează că medianele unui triunghi sunt concurente.

4 Folosind teorema lui Ceva (cu teorema bisectoarei), demonstrează că bisectoarele unui triunghi sunt concurente.

5 Demonstrează că dreptele care unesc vârfurile unui triunghi ABC cu punctele de tangență ale cercului înscris sunt concurente (punctul de concurență se numește punctul lui Gergonne).



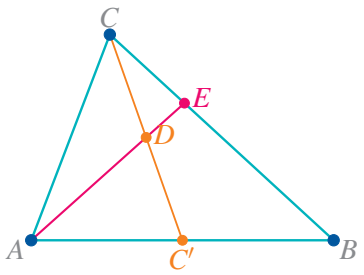
6 Într-un triunghi ABC, fie $A' \in (BC)$ astfel încât $BA'/A'C = 2$ și $B' \in (AC)$ astfel încât $CB'/B'A = 1/3$. În ce raport trebuie să împartă punctul C' latura AB pentru ca dreptele AA', BB', CC' să fie concurente?
Indicație: aplică teorema lui Ceva. $\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1 \Longrightarrow \frac{C'A}{C'B} = \frac{3}{2}$.

Aplicarea teoremei lui Menelaus

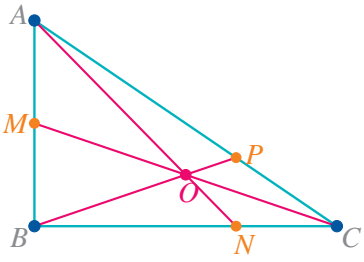
7 Într-un triunghi ABC, fie $D \in (AB)$ cu $AD/DB = 2$, $E \in (AC)$ cu $AE/EC = 3$. Dreapta DE intersectează prelungirea lui BC în F. Calculează raportul FB/FC.
Indicație: aplică teorema lui Menelaus în triunghiul ABC, cu transversala DEF.

8 Într-un triunghi ABC, fie M mijlocul laturii BC și N pe latura AC astfel încât $AN = 2NC$. Dreapta MN intersectează prelungirea lui AB în P. Calculează PA/PB.

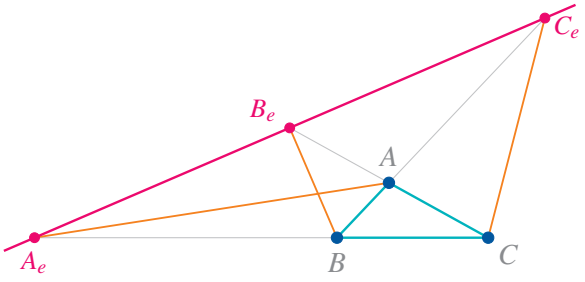
9 În triunghiul ABC consideră D mijlocul medianei CC' și E un punct pe latura BC. Determină raportul $\frac{BE}{BC}$ știind că punctele A, D și E sunt coliniare.



10 În triunghiul ABC fie M mijlocul laturii AB, N pe latura BC astfel încât $BN = 2NC$ și P pe latura AC astfel încât AN, BP și CM sunt concurente în O. Calculează $\frac{AO}{AN}$ și $\frac{AP}{AC}$.



11 Demonstrează că picioarele bisectoarelor exterioare ale unui triunghi neisoscel sunt coliniare.
Indicație: piciorul A_e al bisectoarei exterioare din A verifică $A_eB/A_eC = AB/AC$ (demonstrează ca la teorema bisectoarei, cu teorema sinusurilor); aplică apoi reciproca teoremei lui Menelaus (toate cele trei puncte sunt pe prelungiri).



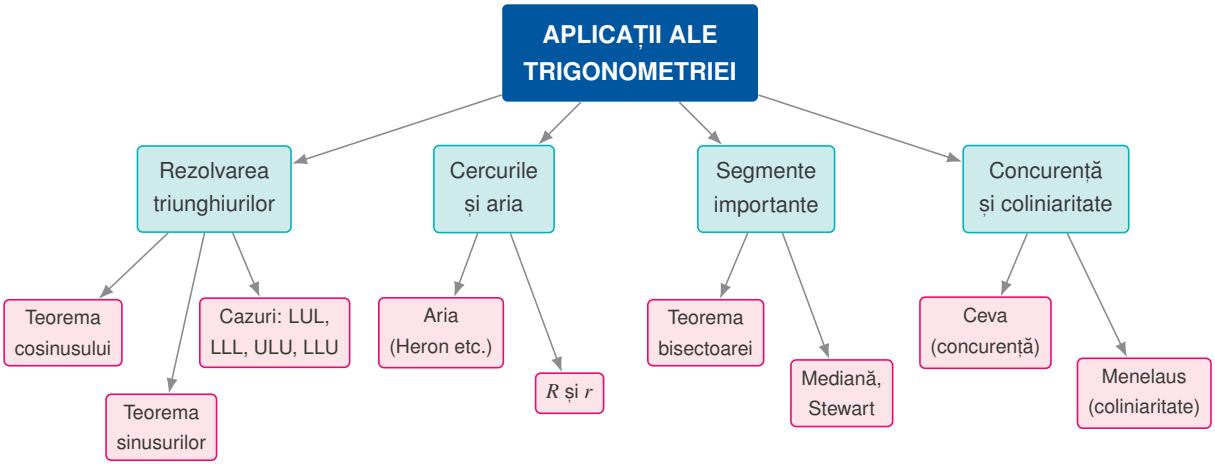
12 ☆ **Portofoliu.** Pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC se iau punctele A', B', C', diferite de vârfuri, astfel încât $BA' = CB' = AC' = k$.

a) Explică de ce punctele A', B', C' nu pot fi coliniare. (*Indicație:* o dreaptă care nu trece prin vârfuri nu poate intersecta interiorul tuturor celor trei laturi.)

b) Dacă triunghiul ABC este echilateral, cu latura a, determină, cu ajutorul teoremei lui Ceva, valoarea lui k pentru care dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.

Recapitulare

Hartă conceptuală



De reținut!

La finalul acestei unități trebuie să poți:

- aplica teorema cosinusului ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$) pentru a afla a treia latură (LUL) sau un unghi (LLL);
- aplica teorema sinusurilor ($\frac{a}{\sin A} = 2R$) pentru cazurile ULU și LLU;
- rezolva un triunghi (afla toate elementele lui) în cazurile LUL, LLL, ULU și LLU;
- recunoaște ambiguitatea cazului LLU (poate avea 0, 1 sau 2 soluții);
- calcula aria unui triunghi prin diverse formule: $\frac{1}{2}ab\sin C$, formula lui Heron, $abc/(4R)$, pr;
- determina raza cercului circumscris (R) și raza cercului înscris (r);
- aplica teorema bisectoarei ($BD/DC = c/b$);
- folosi relația lui Stewart pentru lungimea unei ceviene;
- folosi formulele pentru mediană și bisectoare;
- aplica teorema lui Ceva pentru concurența cevienelor;
- aplica teorema lui Menelaus pentru coliniaritatea a trei puncte;
- utiliza trigonometria în situații practice (triangulație, măsurători indirecte).

Sarcini de sinteză

Exersează!

1 Într-un triunghi ABC, $a=8, b=5, c=7$.

a) Calculează $\cos A$ și determină natura triunghiului.

b) Calculează aria S folosind formula lui Heron.

c) Calculează raza R a cercului circumscris.

d) Calculează raza r a cercului înscris.

2 Se consideră datele $a=6, b=8, A=30^\circ$.

a) Câte triunghiuri sunt compatibile cu aceste date?

b) Rezolvă fiecare triunghi posibil.

3 Într-un triunghi ABC, bisectoarea din A intersectează latura BC în punctul D, astfel încât $BD=4$ și $DC=6$.

a) Care este raportul c/b?

b) Dacă $a=10$ și $b+c=14$, calculează b și c.

4 Într-un triunghi ABC, $A' \in (BC)$ cu $BA'/A'C = 1/2$, $B' \in (CA)$ cu $CB'/B'A = 1/2$, $C' \in (AB)$. În ce raport trebuie să împartă punctul C' latura AB pentru ca cevienele AA', BB', CC' să fie concurente?

5 ☆ **Portofoliu — trilaterație GPS.** Pentru a localiza un punct P pe sol, un sistem GPS folosește trei stații A, B, C cu poziții cunoscute. Distanțele măsurate sunt $PA=5$ km, $PB=4$ km, $PC=3$ km. Stațiile formează un triunghi cu $AB=\sqrt{65}, BC=5, CA=\sqrt{58}$ km. Verifică dacă distanțele măsurate sunt compatibile, adică dacă există un punct P situat la aceste distanțe de cele trei stații. (Indicație: aplică teorema cosinusului în triunghiurile PAB, PBC, PCA pentru a calcula unghiurile APB, BPC, CPA. Dacă P este în interiorul triunghiului ABC, suma lor trebuie să fie 360°; dacă P este în exterior, unul dintre unghiuri trebuie să fie egal cu suma celorlalte două.)

6 (*Lungimile medianelor*) În triunghiul ABC avem $a=7, b=8, c=9$.

a) Calculează lungimile celor trei mediane m_a, m_b, m_c folosind formulele $m_a^2 = (2b^2+2c^2-a^2)/4$ și analoagele.

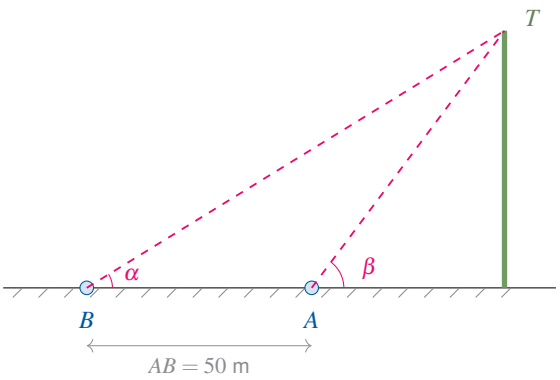
b) Verifică identitatea $4(m_a^2+m_b^2+m_c^2) = 3(a^2+b^2+c^2)$.

7 (*Construcția unui triunghi*) Construiește cu rigla și compasul un triunghi ABC cu $b=AC=6$ cm, $c=AB=8$ cm și $m_a=5$ cm (lungimea medianei din A), apoi verifică prin calcul construcția.

a) Calculează a folosind formula $m_a^2 = (2b^2+2c^2-a^2)/4$.

b) Verifică prin teorema cosinusului că triunghiul construit este unic determinat.

8 (*Aplicație practică*) Doi colegi vor să afle înălțimea unui copac T (vezi schema).



Din punctul B ei măsoară unghiul de elevație $\alpha = 32^\circ$ către vârful copacului. Apoi se apropie cu 50 m și măsoară din punctul A unghiul $\beta = 53^\circ$.

a) În triunghiul ABT: identifică unghiurile cunoscute (la A și la B). Care este unghiul de la T?

b) Aplică teorema sinusurilor pentru a calcula AT.

c) Folosind $\sin\beta$ și AT, determină înălțimea copacului. (Indicație: $h = AT \cdot \sin\beta$.)

9 Demonstrează că în orice triunghi ABC au loc inegalitățile:

a) $\sin\dfrac{A}{2} \leq \dfrac{a}{2\sqrt{bc}}$;

b) $\cos^2\dfrac{B-C}{2} \geq \dfrac{2r}{R}$.

Evaluare — U7

45 de minute · 90 p + 10 p din oficiu

Subiectul I (25 de puncte)

1. **(10 p)** Pentru un triunghi cu laturile $a = 5, b = 7, c = 8$, natura triunghiului este:

- ☐ ascuțitunghic
- ☐ dreptunghic
- ☐ obtuzunghic
- ☐ nu se poate determina

2. **(15 p)** Asociază fiecare situație cu metoda de rezolvare potrivită. Fiecare metodă se folosește o singură dată.

A (situația)	B (metoda)
1) Cunosc două laturi și unghiul dintre ele și vreau a treia latură	a) Teorema sinusurilor
2) Cunosc trei laturi și vreau un unghi	b) Teorema cosinusului
3) Cunosc două unghiuri și o latură și vreau celelalte laturi	c) Formula lui Heron
4) Vreau să calculez aria și cunosc doar cele trei laturi	d) Teorema lui Ceva
5) Vreau să demonstrez că trei ceviene sunt concurente	e) Teorema cosinusului (formă inversă)

Subiectul II (30 de puncte)

3. **(15 p)** Într-un triunghi cu $a = 13, b = 14, c = 15$, completează:

Semiperimetrul: $p =$ _____

Aria (Heron): $S =$ _____

Raza cercului circumscris: $R = \dfrac{abc}{4S} =$ _____

Raza cercului înscris: $r = \dfrac{S}{p} =$ _____

4. **(15 p)** Într-un triunghi ABC cu $b = 6, c = 4, A = 60^\circ$:

Latura $a =$ _____ (folosind teorema cosinusului)

Aria $S =$ _____

$\sin B =$ _____ (folosind teorema sinusurilor)

Subiectul III (35 de puncte)

5. **(20 p)** Într-un triunghi ABC cu $a = 6, b = 8, c = 10$:

a) Determină natura triunghiului.

b) Calculează aria S.

c) Calculează razele R și r.

d) Calculează lungimea medianei din C.

Vor fi notate distinct:

- determinarea naturii triunghiului ..... 4 puncte;
- calculul ariei ..... 4 puncte;
- calculul razelor R, r ..... 6 puncte;
- calculul medianei ..... 6 puncte.

6. **(15 p)** Doi cercetători măsoară lățimea unui canion. Din punctul A ei observă o stâncă S pe malul opus sub unghiul $\angle SAB = 70^\circ$ față de o direcție de referință AB. Apoi se deplasează 200 m până în punctul B, de unde măsoară $\angle SBA = 65^\circ$.

a) Care este unghiul $\angle ASB$?

b) Calculează distanțele AS și BS folosind teorema sinusurilor.

c) Calculează lățimea canionului, adică distanța de la stânca S la dreapta AB.

Vor fi notate distinct:

- determinarea unghiului $\angle ASB$ ..... 3 puncte;
- calculul distanțelor AS, BS ..... 8 puncte;
- calculul lățimii canionului (distanța de la S la dreapta AB) ..... 4 puncte.

Notă: 10 puncte se acordă din oficiu. Total: 100 de puncte. Timp de lucru: 45 de minute.

Exersezi, corectezi, progresezi

Pentru fiecare dintre cele două probleme de la subiectul III, ai aici sarcini pe trei niveluri: **Ameliorare**, **Echivalent** și **Dezvoltare**. În funcție de rezultatul obținut la test, începe cu nivelul potrivit și continuă cu următoarele.

Pentru subiectul III, itemul 5 (calcule metrice într-un triunghi)

Ameliorare

Pas cu pas, refă rezolvarea.

1. Pentru triunghiul cu laturile $a=3, b=4, c=5$:
   a) Calculează a^2+b^2 și c^2. Sunt egale?
   b) Care este natura triunghiului?
   c) Aplică formula lui Heron pentru a calcula aria S.
   d) Calculează $R=abc/(4S)$ și $r=S/p$.
2. Calculează lungimea medianei din A pentru același triunghi, folosind $m_a^2=(2b^2+2c^2-a^2)/4$.

Echivalent

Într-un triunghi ABC cu $a=5, b=12, c=13$:

a) Determină natura triunghiului.
b) Calculează aria S.
c) Calculează razele R și r.
d) Calculează lungimea medianei din C.

Dezvoltare

Într-un triunghi ABC cu $a=7, b=8, c=9$:

a) Calculează aria S și raza R.
b) Calculează lungimile celor trei mediane m_a, m_b, m_c.
c) Verifică identitatea $4(m_a^2+m_b^2+m_c^2)=3(a^2+b^2+c^2)$.
d) Calculează lungimea bisectoarei din A.

Pentru subiectul III, itemul 6 (aplicație practică)

Ameliorare

Pas cu pas.

3 Doi turiști pleacă din același punct. Primul merge 4 km în direcția nord, iar al doilea merge 3 km într-o direcție care formează un unghi de 90° cu direcția primului.

a) Aplică teorema lui Pitagora pentru a calcula distanța dintre cei doi turiști.

b) Acum schimbăm: unghiul nu mai e 90°, ci 60°. Folosește teorema cosinusului. Care este formula?

c) Calculează distanța în acest caz.

Echivalent

Un avion zboară de la aeroportul A pe o traiectorie de 250 km până la punctul B. Apoi își schimbă direcția cu 40° spre dreapta și mai zboară 180 km până la C.

a) Care este distanța AC în linie dreaptă?

b) Ce unghi formează dreapta AC cu traiectoria AB?

Dezvoltare

Triangulație topografică. Un teren agricol triunghiular are vârfurile A, B, C. Un topograf măsoară $AB = 120$ m, $\angle BAC = 80^\circ$ și $\angle ABC = 60^\circ$.

a) Calculează lungimile BC și CA.

b) Calculează aria terenului.

c) Determină raza cercului circumscris triunghiului ABC.

d) Câte plante se pot cultiva pe teren dacă densitatea recomandată este de 5 plante/m²?

Autoevaluare

Bifează enunțurile care descriu ce poți face singur, fără ajutor:

- ☐ Pot aplica teorema cosinusului ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$) pentru a afla a treia latură (caz LUL) sau un unghi (caz LLL).
- ☐ Pot aplica teorema sinusurilor ($a/\sin A = 2R$) în cazurile ULU și LLU.
- ☐ Pot rezolva un triunghi (afla toate elementele lui) în cazurile LUL, LLL, ULU și LLU.
- ☐ Recunosc ambiguitatea cazului LLU și pot indica când există 0, 1 sau 2 triunghiuri compatibile.
- ☐ Pot determina natura unui triunghi (ascuțitunghic, dreptunghic, obtuzunghic) cunoscând laturile sale.
- ☐ Aplic corect cele 5 formule pentru aria triunghiului ($\frac{1}{2}ab\sin C$, Heron, $abc/(4R)$, pr, $\frac{1}{2}$bază · înălțime).
- ☐ Pot calcula raza cercului circumscris (R) și raza cercului înscris (r) ale unui triunghi.
- ☐ Cunosc formulele pentru triunghiul echilateral: S, R, r în funcție de latura a.
- ☐ Aplic teorema bisectoarei ($BD/DC = c/b$) pentru a calcula segmentele în care bisectoarea împarte latura opusă.
- ☐ Folosesc relația lui Stewart pentru lungimea unei ceviene.
- ☐ Cunosc formulele pentru lungimile medianei și ale bisectoarei.
- ☐ Aplic teorema lui Ceva pentru a demonstra concurența a trei ceviene.
- ☐ Aplic teorema lui Menelaus pentru a demonstra coliniaritatea a trei puncte.
- ☐ Pot folosi trigonometria în situații practice: măsurători indirecte, triangulație, navigație.

Cum interpretezi rezultatul?

- Dacă ai bifat **12–14 enunțuri**: stăpânești conținutul unității. Felicitări! Treci cu încredere la U8 (Recapitulare finală) și încearcă sarcinile cu ☆ din lecțiile parcurse, pentru a-ți consolida cunoștințele și a te pregăti pentru clasa a X-a.
- Dacă ai bifat **8–11 enunțuri**: ești pe drumul cel bun. Reia sarcinile de tip „Echivalent” din secțiunea „Exersezi, corectezi, progresezi” înainte de a începe U8.
- Dacă ai bifat **0–7 enunțuri**: solicită sprijinul profesorului. Reia sarcinile de tip „Ameliorare” din secțiunea „Exersezi, corectezi, progresezi” împreună cu un coleg.

Reflectează:

- Care unitate ți-a plăcut cel mai mult? De ce?
- Care a fost cel mai dificil concept din unitățile U1–U7? Cum l-ai depășit?
- Cum vezi conexiunile între unități: cum se leagă logica (U1) de demonstrațiile geometrice (U7)? Cum se leagă funcțiile (U3–U5) de trigonometrie (U6, U7)?
- Ce situație din viața reală ți-a captat atenția cel mai mult: dobânda compusă (U2), parabola unei mingi (U4), oscilațiile mareei (U6) sau trilaterația GPS (U7)?
- Cum poți aplica raționamentul matematic învățat la alte materii sau în viața de zi cu zi?

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE

U8

Recapitulare finală. Sinteze și teste integratoare

Învățarea matematicii este precum construirea unei catedrale: fiecare piatră așezată o face mai puternică, dar adevărata frumusețe se vede doar când privești întregul.

Lecțiile unității

- L8.1 — Sinteză U1+U2: logică, mulțimi, șiruri, progresii
- L8.2 — Sinteză U3–U5: funcții, gradul al doilea, putere, radical
- L8.3 — Sinteză U6+U7: trigonometrie și aplicații în geometrie
- Test de simulare (90 min, 100 de puncte)
- Test final integrator (90 min, 100 de puncte)
- Exersezi, corectezi, progresezi · Autoevaluare finală · Jurnal de învățare

Ce vei învăța

- să legi între ele noțiunile din toate unitățile;
- să aplici, în teste integratoare, ce ai învățat în acest an;
- să îți evaluezi singur progresul.



Lecția L8.1

Sinteză U1+U2: logică, mulțimi, șiruri, progresii

Concepte-cheie de revăzut

★ Important!

Din U1 (Logică matematică, mulțimi, demonstrații).

- Propoziții: valoare de adevăr ($1 =$ adevărat, $0 =$ fals).
- Operatori logici: $\wedge$ (și), $\vee$ (sau), $\neg$ (non), $\Longrightarrow$ (implică), $\Longleftrightarrow$ (echivalent).
- Predicate și cuantificatori: $\forall$ (oricare), $\exists$ (există).
- Legătura cu mulțimile: „și” $\leftrightarrow \cap$ (intersecție), „sau” $\leftrightarrow \cup$ (reuniune), „non” $\leftrightarrow$ complementara.
- Tipuri de demonstrații: directă, prin reducere la absurd, prin inducție matematică.
- Inducție: pasul de bază și pasul inductiv.

Din U2 (Șiruri și progresii).

- Șir: funcție $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$. Termen general a_n, recurență $a_{n+1} = f(a_n)$.
- *Progresie aritmetică* (PA): $a_{n+1} = a_n + r$. Termen general: $a_n = a_1 + (n-1)r$.
- Suma PA: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2} = \dfrac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2}$.
- *Progresie geometrică* (PG): $b_{n+1} = b_n \cdot q$. Termen general: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.
- Suma PG (când $q \neq 1$): $S_n = b_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.
- Dobândă: simplă (PA) față de compusă (PG, formula $C_n = C_0(1+p)^n$, unde p este dobânda anuală scrisă în formă zecimală, de exemplu $p = 0{,}04$ pentru 4%).

Sarcini de sinteză transversală

Exersează!

Conexiuni între logică și demonstrații

1 Demonstrează prin inducție matematică că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Indicație: verifică pentru $n = 1$ ($1 = 1^2$). Apoi presupune pentru $n = k$ și demonstrează pentru $n = k+1$,

folosind $1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1)$.

2 Folosind reducerea la absurd, demonstrează că $\sqrt{3}$ este irațional.

Conexiuni între mulțimi și șiruri

3 Determină mulțimea $A=\{n\in\mathbb{N}^*\mid n^2-5n+4<0\}$.
Indicație: rezolvă inecuația în $\mathbb{R}$, apoi intersectează cu $\mathbb{N}^*$.

Progresii în context practic

4 Andrei începe să economisească pentru o bicicletă. În prima lună pune 50 de lei, iar în fiecare lună următoare adaugă cu 10 lei mai mult decât în luna anterioară.

a) Ce tip de progresie formează sumele economisite în fiecare lună? Determină primul termen și rația.

b) Câți lei va pune Andrei în luna a 12-a?

c) Câți lei va avea Andrei la finalul anului (12 luni)?

5 Maria depune 5 000 de lei la o bancă cu dobândă compusă anuală de 4%.

a) Ce tip de progresie formează sumele de la sfârșitul fiecărui an?

b) Cât va avea Maria după 5 ani?

c) Câți ani trebuie să aștepte Maria pentru a-și dubla suma? (Poți folosi un calculator sau o foaie de calcul.)

6 ☆ **Portofoliu.** Demonstrează prin inducție că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice cu rația $q\neq 1$ este:

$$S_n=b_1+b_1q+b_1q^2+\cdots+b_1q^{n-1}=b_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Lecția L8.2

Sinteză U3–U5: funcții, gradul al doilea, putere, radical

Concepte-cheie de revăzut

★ **Important!**

Din U3 (Funcții. Proprietăți generale).

- Funcție $f : A \to B$: domeniu A, codomeniu B, imagine $\operatorname{Im} f$.
- Graficul funcției: $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$; desenul lui în reperul xOy este reprezentarea grafică a funcției.
- Funcție afină: $f(x) = ax + b$. Pantă a.
- Proprietăți: monotonie, paritate/imparitate, mărginire, injectivitate, surjectivitate, bijectivitate.
- Funcție inversă: există dacă și numai dacă f este bijectivă.
- Compunerea funcțiilor: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Din U4 (Funcția de gradul al doilea).

- Funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$: discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, vârf $V(-b/(2a), -\Delta/(4a))$.
- Soluții: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, dacă $\Delta \geq 0$.
- Relațiile lui Viète: $S = -b/a$, $P = c/a$.
- Sisteme: metoda substituției; tipuri (formate dintr-o ecuație de gradul I și una de gradul al doilea, omogene, simetrice).

Din U5 (Putere, radical).

- Funcția putere x^n: pară pentru n par, impară pentru n impar.
- Funcția radical: inversa funcției putere (pentru n par, a restricției acesteia la $[0, +\infty)$); echivalențe folosite la rezolvarea ecuațiilor cu radicali.

Sarcini de sinteză transversală

Exersează!

Conexiuni între funcții și funcția de gradul al doilea

1 Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$:

a) Determină vârful, intersecțiile cu axele, axa de simetrie.

b) Construiește tabelul de variație. Pe ce intervale f este monotonă?

c) Este f pară? Impară? Niciuna? Justifică.

d) Este f injectivă pe $\mathbb{R}$? Care sunt intervalele cât mai mari pe care f este injectivă?

e) Pentru restricția bijectivă $g:[2,+\infty)\to[-1,+\infty)$, $g(x)=x^2-4x+3$, determină inversa g^{-1}.

Conexiuni între funcția de gradul al doilea și relațiile lui Viète

2 Fie ecuația $x^2-5x+m=0$, cu rădăcinile x_1, x_2.

a) Determină valorile lui m pentru care ecuația are rădăcini reale și arată că, pentru fiecare dintre aceste valori, $x_1+x_2=5$.

b) Determină m astfel încât $x_1^2+x_2^2=13$.

c) Determină m astfel încât $x_1\cdot x_2=-6$.

d) Determină m astfel încât $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{5}{6}$.

Conexiuni între funcția putere și funcția radical

3 Rezolvă în $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{2x+5}=x+1$;

b) $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}=2$;

c) $x^4-5x^2+4=0$ (substituție $u=x^2$).

Modelare integrată

4 O minge este aruncată în sus cu viteza inițială v_0. Înălțimea (în m) la momentul t (în s) este $h(t)=-5t^2+v_0t+h_0$, unde h_0 este înălțimea inițială.

a) Pentru $v_0=20$ m/s și $h_0=1{,}5$ m, exprimă $h(t)$. Care este înălțimea maximă? La ce moment?

b) După cât timp mingea revine la sol ($h=0$)?

c) În ce interval de timp mingea se află la o înălțime de cel puțin 16 m?

5 ☆ **Portofoliu.** Pentru funcția $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $f(x)=\sqrt{x}$, demonstrează că f este *strict crescătoare*, fără a folosi monotonia funcției $g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $g(x)=x^2$ (deci direct, prin definiție: pentru $0\le x_1<x_2$, arată că $\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}$).

Indicație: pentru $0\le x_1<x_2$, avem $\sqrt{x_2}>0$, deci $\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}>0$ și $\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}=\dfrac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}$.

Lecția L8.3

Sinteză U6+U7: trigonometrie și aplicații în geometrie

Concepte-cheie de revăzut

★ **Important!**

Din U6 (Funcții trigonometrice. Ecuații trigonometrice).

- Cercul trigonometric: $M(t) = (\cos t, \sin t)$.
- Formula fundamentală: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- Periodicitate: $\sin, \cos$ au $T = 2\pi$; $\mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$ au $T = \pi$.
- Paritate: cos pară; $\sin, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$ impare.
- Formule de adunare: $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$, $\mathrm{tg}(a \pm b)$.
- Formule pentru argumentul dublu: $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.
- Funcții inverse: $\arcsin, \arccos, \mathrm{arctg}, \mathrm{arcctg}$ și domeniile lor.
- Tipuri de ecuații trigonometrice: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}\, x = a$ etc.

Din U7 (Aplicații în geometrie).

- Teorema cosinusului: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.
- Teorema sinusurilor: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.
- Cazuri de rezolvare: LUL, LLL, ULU, LLU.
- Aria triunghiului (5 formule): $\dfrac{1}{2}ah_a$, $\dfrac{1}{2}ab\sin C$, Heron, $abc/(4R)$, pr.
- Teorema bisectoarei: dacă AD este bisectoarea unghiului A ($D \in BC$), atunci $BD/DC = c/b$.
- Relația lui Stewart; lungimea medianei și lungimea bisectoarei.
- Teorema lui Ceva (concurență); teorema lui Menelaus (coliniaritate).

Sarcini de sinteză transversală

Exersează!

Conexiuni între trigonometrie și algebră

1 Calculează valorile exacte:

a) $\sin\dfrac{5\pi}{12}$ (folosind $5\pi/12 = \pi/4 + \pi/6$);

b) $\cos 15^\circ$ (folosind $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$);

c) $\operatorname{tg} 75^\circ$.

2 Rezolvă pe $[0, 2\pi]$:

a) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ (substituție $u = \cos x$);

b) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$.

Conexiuni între trigonometrie și geometrie

3 Într-un triunghi ABC, $a = 7, b = 8, c = 5$.

a) Calculează $\cos A$ și $\cos B$ (B este unghiul opus celei mai lungi laturi). Triunghiul este ascuțitunghic, dreptunghic sau obtuzunghic?

b) Calculează $\sin A$.

c) Calculează aria S.

d) Calculează raza R a cercului circumscris.

e) Calculează lungimea bisectoarei din A.

Modelare integrată: triangulație topografică

4 Doi observatori A și B, situați la 200 m unul de celălalt pe malul unui lac, observă o stâncă S pe malul opus. Unghiurile măsurate sunt:

- $\angle SAB = 75^\circ$;
- $\angle SBA = 60^\circ$.

a) Calculează unghiul $\angle ASB$.

b) Calculează distanțele AS și BS (folosește teorema sinusurilor).

c) Calculează distanța de la stânca S la dreapta AB (înălțimea triunghiului).

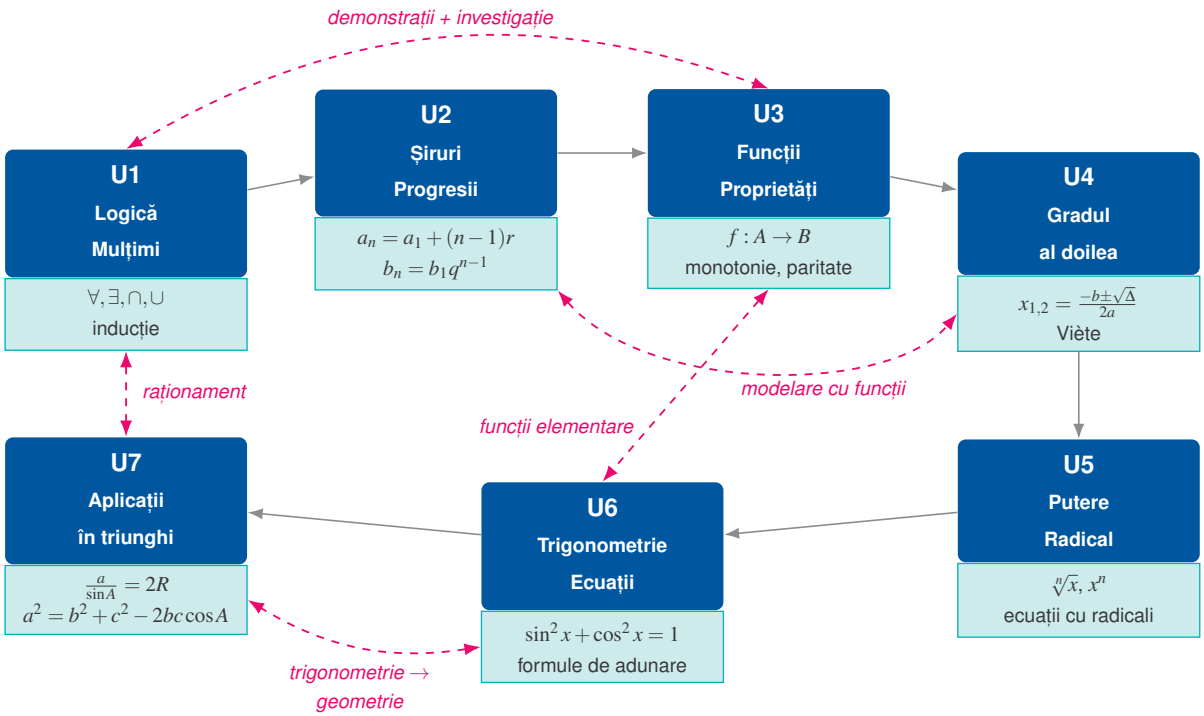
5 ☆ **Portofoliu — problemă de olimpiadă.** Într-un triunghi ABC, demonstrează, folosind formulele trigonometrice și relațiile metrice, identitatea:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1.$$

Indicație: folosește $C = \pi - A - B$, deci $\cos C = -\cos(A + B)$, și formula $\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$.

Hartă conceptuală a întregului an

Toate cele șapte unități pe care le-ai studiat în clasa a IX-a sunt legate între ele. Logica te-a învățat să argumentezi *riguros; șirurile și progresiile ți-au arătat cum modelăm* regularitățile*; funcțiile ți-au oferit limbajul pentru descrierea* dependenței *dintre mărimi; funcția de gradul al doilea, puterile și radicalii ți-au dat instrumente* algebrice*; trigonometria a unit* cercul *cu* funcțiile periodice*; iar aplicațiile în triunghi ți-au arătat puterea trigonometriei în* geometrie *și în viața reală.*



Patru fire roșii care străbat tot anul

- **Limbajul matematic riguros.** Învățat formal în U1 (logică, demonstrații prin inducție și reducere la absurd), folosit *tot anul* la fiecare demonstrație și la fiecare „deci” din rezolvările tale.
- **Reprezentări multiple.** Aceeași informație matematică poate fi exprimată în *mai multe limbaje*: text (descriere verbală), tabel (date organizate), formulă (sintetică), grafic (vizual). Trecerea liberă de la un limbaj la altul este o abilitate esențială.
- **Modelarea realității.** Fenomene din viața reală pot fi descrise matematic: economii (PA), dobândă compusă (PG), traiectoria unei mingi (funcția de gradul al doilea), mareele (funcția sinus), distanțe inaccesibile (trigonometrie). Matematica este un *limbaj* prin care lumea devine mai inteligibilă.
- **Instrumentele digitale.** Foi de calcul (verificarea numerică a unor formule pentru primele valori ale lui n, calcule cu progresii), Desmos / GeoGebra (lectura grafică, reprezentarea funcțiilor), simulatoare (cerc trigonometric). Tehnologia nu înlocuiește gândirea matematică — o completează.

Test 1 — Simulare

90 de minute · 90 de puncte + 10 puncte din oficiu

Acest test acoperă toate cele șapte unități studiate în clasa a IX-a. Citește cu atenție fiecare cerință. Lucrările trebuie redactate complet, cu justificări. Notarea ține cont de corectitudinea raționamentului și de claritatea prezentării.

Subiectul I (20 de puncte)

1. **(5 p)** *(U1)* Negația propoziției „$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$” este:

☐ $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$

☐ $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$

☐ $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$

☐ $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 0$

2. **(5 p)** *(U5)* Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{3x+1} = x-1$ este:

☐ $\{0\}$

☐ $\{5\}$

☐ $\{0, 5\}$

☐ $\emptyset$

3. **(5 p)** *(U4)* Vârful parabolei $y = -x^2 + 4x - 3$ are coordonatele:

☐ $(2, 1)$

☐ $(-2, 1)$

☐ $(2, -1)$

☐ $(4, -3)$

4. **(5 p)** *(U6)* Valoarea lui $\sin \dfrac{5\pi}{6}$ este:

☐ $\dfrac{1}{2}$

☐ $-\dfrac{1}{2}$

☐ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

☐ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Subiectul II (30 de puncte)

5. (10 p) *(U1+U2)* Determină valoarea lui S:

$$S = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 100.$$

Argumentează că termenii formează o progresie aritmetică, calculează numărul de termeni și aplică formula sumei.

Numărul termenilor: $n =$ _____

Suma: $S =$ _____

6. (10 p) *(U3+U4)* Pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$, completează:

Forma canonică: $f(x) =$ _____

Vârful: $V =$ _____

Rădăcinile: $x_1 =$ _____, $x_2 =$ _____

Mulțimea soluțiilor inecuației $f(x) < 0$: $S =$ _____

7. (10 p) *(U6+U7)* Într-un triunghi ABC cu $a = 5, b = 6, c = 7$, completează:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \text{_____}$$

$\sin A =$ _____

Aria: $S = \dfrac{1}{2} bc \sin A =$ _____

Raza cercului circumscris: $R =$ _____

Subiectul III (40 de puncte)

8. (15 p) *(U2 — modelare cu progresii)* O bibliotecă publică deține 5 000 de cărți la sfârșitul anului 2025. Conducerea decide ca, în fiecare an următor, numărul de cărți să crească cu 5% față de numărul existent la sfârșitul anului precedent.

a) Câte cărți va avea biblioteca la sfârșitul lui 2026? Dar la sfârșitul lui 2027? (Rotunjește rezultatul la un număr întreg de cărți.)

b) Notează cu a_n numărul de cărți la sfârșitul anului $2025 + n$. Determină formula generală pentru a_n.

c) Câți ani vor trebui pentru ca biblioteca să depășească 10 000 de cărți?

Punctaj:

- identificarea progresiei geometrice și calculul termenilor a_1, a_2 ..... 5 puncte;
- formula $a_n = a_0 \cdot 1{,}05^n$ ..... 5 puncte;
- determinarea numărului de ani (n minim astfel încât $a_n > 10\,000$) ..... 5 puncte.

9. **(15 p)** *(U4 — modelare cu funcție pătratică)* O firmă vinde mașini de cafea. Profitul P (în lei) în funcție de prețul de vânzare p (în lei) este modelat de:

$$P(p) = -p^2 + 800p - 120\,000.$$

a) La ce preț profitul este maxim? Care este profitul maxim?

b) Pentru ce prețuri firma nu mai are profit (adică $P(p) \leq 0$)?

c) Pe ce interval de prețuri profitul depășește 30 000 de lei?

Punctaj:

- determinarea vârfului parabolei ..... 5 puncte;
- rezolvarea inecuației $P(p) \leq 0$ ..... 5 puncte;
- rezolvarea inecuației $P(p) > 30\,000$ ..... 5 puncte.

10. **(10 p)** *(U6+U7 — aplicație practică în navigație)* Un avion zboară de la aeroportul A pe o traiectorie de 400 km până la punctul B, apoi își schimbă direcția cu 50° spre dreapta și mai zboară 250 km până la C.

a) Care este distanța AC în linie dreaptă?

b) Ce măsură are unghiul format de direcția AC cu traiectoria AB?

Punctaj:

- identificarea unghiului $\angle ABC$ al triunghiului ($180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$) ..... 2 puncte;
- calculul lui AC prin teorema cosinusului ..... 4 puncte;
- calculul unghiului $\angle BAC$ prin teorema sinusurilor ..... 4 puncte.

Notă: 10 puncte se acordă din oficiu. Total: 100 de puncte. Timp de lucru: 90 de minute. Este permisă folosirea calculatorului.

Test 2 — Test final integrator

90 de minute · 90 de puncte + 10 puncte din oficiu

Acest test final integrează toate cele șapte unități. Subiectele sunt construite progresiv: I (25 p), II (25 p) și III (40 p). Lucrările trebuie redactate cu rigoare matematică. Notarea apreciază claritatea, exactitatea și corectitudinea raționamentului.

Subiectul I (25 de puncte)

1. **(5 p)** *(U5)* Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=2$ este:

- ☐ $\{4\}$
- ☐ $\{3\}$
- ☐ $\{4,12\}$
- ☐ $\emptyset$

2. **(5 p)** *(U2)* Suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $1,4,7,10,\ldots$ este:

- ☐ 580
- ☐ 590
- ☐ 610
- ☐ 620

3. **(5 p)** *(U3)* Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-7$, este:

- ☐ pară și injectivă
- ☐ impară și injectivă
- ☐ strict crescătoare și injectivă
- ☐ mărginită

4. **(5 p)** *(U4)* Numărul soluțiilor reale ale ecuației $x^2+2x+5=0$ este:

- ☐ 0
- ☐ 1 (soluție dublă)
- ☐ 2
- ☐ infinit

5. **(5 p)** *(U7)* Într-un triunghi cu $a = 5, b = 5, c = 6$, raportul r/R (raza cercului înscris la cea a cercului circumscris) este:

☐ mai mic decât $1/2$

☐ egal cu $1/2$

☐ mai mare decât $1/2$

☐ nu se poate calcula

Indicație: inegalitatea lui Euler stabilește $R \geq 2r$, deci $r/R \leq 1/2$.

Subiectul II (25 de puncte)

6. **(5 p)** *(U1)* Demonstrează prin inducție matematică că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

7. **(5 p)** *(U3+U4)* Pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 5$, completează:

Vârful $V =$ _____

Im $f =$ _____

Cel mai mare interval de forma $[a, +\infty)$ pe care f este injectivă: _____

8. **(5 p)** *(U6)* Calculează:

$\sin 75^\circ \cdot \cos 15^\circ + \cos 75^\circ \cdot \sin 15^\circ =$ _____

$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(\frac{1}{2}\right) =$ _____

9. **(10 p)** *(U7)* Într-un triunghi ABC cu $a = 4, b = 5, c = 6$:

Aria (Heron): $S =$ _____

Raza cercului înscris: $r =$ _____

Raza cercului circumscris: $R =$ _____

Lungimea medianei din A: $m_a =$ _____

Subiectul III (40 de puncte)

10. **(15 p)** *(U2+U3 — progresie și funcție)* Maria pornește un program de fitness. În ziua 1 aleargă 1,5 km. Apoi, în fiecare zi următoare, aleargă cu 0,25 km mai mult decât în ziua precedentă.

a) Notează cu d_n distanța alergată în ziua n. Identifică tipul progresiei și determină formula lui d_n.

b) Câți kilometri va alerga Maria în ziua 20?

c) Care este distanța *totală* alergată în primele 14 zile?

d) Reprezintă grafic primii 5 termeni ai șirului $(d_n)_{n\geq 1}$.

Punctaj:

- formula $d_n = 1{,}5 + (n-1)\cdot 0{,}25$ ..... 4 puncte;
- calculul lui d_{20} ..... 3 puncte;
- calculul sumei S_{14} ..... 4 puncte;
- reprezentarea grafică a celor 5 puncte (n, d_n) ..... 4 puncte.

11. **(15 p)** *(U3+U4 — modelare cu funcția de gradul al doilea)* Un constructor proiectează o fereastră formată *dintr-un dreptunghi și un semicerc așezat deasupra acestuia*. Conturul ferestrei (perimetrul total) trebuie să aibă lungimea fixă de 6 m. Lățimea x a ferestrei (egală cu diametrul semicercului) poate varia.

a) Exprimă înălțimea h a părții dreptunghiulare în funcție de x. (Indicație: perimetrul $= x + 2h + \pi x/2$.)

b) Exprimă aria totală $A(x)$ a ferestrei în funcție de x.

c) Pentru ce lățime x aria este maximă?

d) Calculează această arie maximă.

Punctaj:

- modelarea $h = 3 - (2+\pi)x/4$ ..... 3 puncte;
- calculul ariei $A(x) = x\cdot h + \pi(x/2)^2/2 = 3x - (4+\pi)x^2/8$ ..... 4 puncte;
- determinarea vârfului parabolei ($x = 12/(4+\pi) \approx 1{,}68$ m) ..... 4 puncte;
- interpretarea numerică ($A_{\max} = 18/(4+\pi) \approx 2{,}52$ m^2) ..... 4 puncte.

12. **(10 p)** *(U7 — triangulație topografică integrată)* Trei stații de monitorizare a calității aerului A, B, C formează un triunghi cu $AB = 8$ km, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 80^\circ$.

a) Calculează unghiul $\angle ACB$.

b) Calculează lungimile BC și CA folosind teorema sinusurilor.

c) Calculează aria triunghiului ABC.

d) Determină raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Punctaj:

- calculul lui $\angle ACB$ ..... 2 puncte;
- calculul lungimilor BC și CA ..... 3 puncte;
- calculul ariei ..... 3 puncte;
- calculul lui R ..... 2 puncte.

Notă: 10 puncte se acordă din oficiu. Total: 100 de puncte. Timp de lucru: 90 de minute. Este permisă folosirea calculatorului.

Exersezi, corectezi, progresezi (final)

Pentru itemii importanți din testele 1 și 2, ai aici sarcini pe trei niveluri: **Ameliorare**, **Echivalent** și **Dezvoltare**. În funcție de rezultatele obținute la teste, începe cu nivelul potrivit și continuă cu următoarele.

Pentru sarcinile cu progresii (U2)

Ameliorare

Pas cu pas, refă rezolvarea.

1. Calculează termenul al 5-lea al unei progresii aritmetice cu $a_1 = 2$ și $r = 3$:
   a) Aplică formula $a_n = a_1 + (n-1)r$.
   b) Calculează: $a_5 = 2 + 4 \cdot 3 = ?$
2. Calculează suma primilor 10 termeni ai aceleiași progresii:
   a) $a_{10} = 2 + 9 \cdot 3 = ?$
   b) $S_{10} = (a_1 + a_{10}) \cdot 10/2 = ?$

Echivalent

Andrei depune 1 000 de lei la o bancă cu dobândă compusă de 5% pe an.

a) Cât va avea după 3 ani?
b) Cât va avea după 10 ani?
c) După câți ani suma va depăși 2 000 de lei?

Dezvoltare

Sara plănuiește să economisească pentru o mașină. În prima lună depune 200 de lei. În fiecare lună următoare, depune cu 10% mai mult decât în luna precedentă.

a) Identifică tipul progresiei și formula termenului general.
b) Cât depune Sara în luna a 12-a?
c) Cât a economisit Sara după 24 de luni *în total*?
d) Comparativ, dacă ar fi depus lunar aceeași sumă, de 200 de lei, cât ar fi avut după 24 de luni? Discută diferența.

Pentru sarcinile cu funcția de gradul al doilea (U4)

Ameliorare

Pas cu pas.

3 Pentru $f(x) = -x^2 + 4x + 5$:

a) Calculează $\Delta = b^2 - 4ac$.

b) Calculează rădăcinile prin formula $x_{1,2}$.

c) Determină vârful: $x_V = -b/(2a)$, $y_V = f(x_V)$.

d) Construiește tabelul de variație.

Echivalent

O firmă produce x tricouri pe lună cu profitul $P(x) = -x^2 + 50x - 400$ (lei).

a) Pentru ce nivel de producție profitul este maxim?

b) Care este profitul maxim?

c) Pentru ce nivel de producție firma începe să aibă profit ($P(x) > 0$)?

Dezvoltare

Optimizare integrată. Un fermier are 200 m de gard și vrea să împrejmuiască două țarcuri dreptunghiulare alăturate, care au o latură comună (deci gardul formează 4 laturi orizontale și 3 laturi verticale).

a) Notează cu x lungimea fiecărei laturi verticale și cu y lungimea laturii orizontale a fiecărui țarc. Exprimă y în funcție de x, folosind lungimea totală a gardului.

b) Exprimă aria totală $A(x)$ a celor două țarcuri în funcție de x.

c) Pentru ce x aria totală este maximă? Calculează aria maximă.

Pentru sarcinile cu trigonometrie și triunghi (U6+U7)

Ameliorare

Pas cu pas.

4 Într-un triunghi ABC cu $a = 3, b = 4, c = 5$:

a) Verifică: $a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25 = c^2$. Ce concluzie tragi?

b) Care este aria? (Folosește $S = (1/2) \cdot 3 \cdot 4 = 6$.)

c) Care este raza cercului circumscris? (Într-un triunghi dreptunghic, raza cercului circumscris este jumătate din ipotenuză: $R = c/2$.)

Echivalent

Într-un triunghi ABC cu $a = 6, b = 8, A = 30^\circ$:

a) Folosind teorema sinusurilor, calculează $\sin B$.

b) Câte triunghiuri compatibile cu datele există?

c) Pentru fiecare triunghi posibil, calculează unghiurile B, C și latura c.

Dezvoltare

Triangulație topografică (rezolvare integrată). Pentru a măsura înălțimea unui munte, un topograf face următoarele măsurători de la nivelul solului:

- De la punctul A, observă vârful muntelui sub un unghi de elevație de 30°.
- Se deplasează 1 000 m mai aproape de munte (în direcția lui), ajungând în punctul B.
- De la B, observă vârful sub un unghi de elevație de 45°.

a) Notează cu h înălțimea muntelui și cu d distanța de la B la punctul C, situat la baza muntelui, pe verticala vârfului. Scrie două ecuații în necunoscutele h și d, folosind tangentele celor două unghiuri.

b) Rezolvă sistemul și determină h și d.

c) Verifică rezultatul, folosind teorema sinusurilor în triunghiul ABV, unde V este vârful muntelui (calculează mai întâi măsura unghiului AVB).

Indicație: $\operatorname{tg} 30^\circ = h/(1\,000 + d)$ și $\operatorname{tg} 45^\circ = h/d$.

Autoevaluare

Bifează *toate* enunțurile care descriu ce poți face singur, pe baza întregului parcurs din clasa a IX-a:

U1 — Logică, mulțimi, demonstrații

- ☐ Recunosc o propoziție și calculez valoarea ei de adevăr cu tabele de adevăr.
- ☐ Demonstrez prin reducere la absurd și prin inducție matematică.

U2 — Șiruri și progresii

- ☐ Stabilesc dacă un șir este o progresie aritmetică sau geometrică.
- ☐ Aplic formulele $a_n = a_1 + (n-1)r$ (PA) și $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ (PG).
- ☐ Calculez sume S_n pentru ambele tipuri de progresii.
- ☐ Modelez situații practice: dobândă simplă/compusă, economii.

U3 — Funcții. Proprietăți generale

- ☐ Determin domeniul, codomeniul, imaginea unei funcții.
- ☐ Identific monotonia, paritatea, mărginirea, injectivitatea, surjectivitatea.
- ☐ Compun funcții și determin inversa unei funcții bijective.

U4 — Funcția de gradul al doilea

- ☐ Aplic formula $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$ și interpretez grafic rezultatul (cu ajutorul parabolei).
- ☐ Folosesc relațiile lui Viète pentru calculul expresiilor simetrice în rădăcini și pentru scrierea ecuației când cunosc suma și produsul rădăcinilor.
- ☐ Rezolv sisteme formate dintr-o ecuație de gradul I și una de gradul al doilea, sisteme simetrice și sisteme omogene.

U5 — Putere, radical

- ☐ Lucrez cu radicali (operații, raționalizare) și ecuații/inecuații cu radicali.

U6 — Trigonometrie

- ☐ Localizez puncte pe cercul trigonometric și calculez valorile funcțiilor trigonometrice în puncte remarcabile.
- ☐ Aplic formula fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ și formulele de adunare.
- ☐ Lucrez cu funcțiile inverse $\arcsin, \arccos, \operatorname{arctg}, \operatorname{arcctg}$.
- ☐ Rezolv ecuații trigonometrice de tipurile cunoscute.

U7 — Aplicații în geometrie

- ☐ Aplic teorema cosinusului și teorema sinusurilor pentru rezolvarea triunghiurilor.
- ☐ Calculez aria unui triunghi prin formulele cunoscute (Heron, $\frac{1}{2}ab\sin C$, $abc/(4R)$, pr).
- ☐ Determin raza cercului înscris și a celui circumscris.
- ☐ Folosesc teorema lui Ceva pentru a demonstra concurența a trei ceviene și teorema lui Menelaus pentru a demonstra coliniaritatea a trei puncte.

Cum interpretezi rezultatul?

- Dacă ai bifat **18–21 de enunțuri**: ai stăpânit excelent matematica de clasa a IX-a. Poți aborda cu încredere clasa a X-a.
- Dacă ai bifat **12–17 enunțuri**: ai o bază solidă. Reia unitățile la care nu ai bifat toate enunțurile și exersează cu sarcinile din secțiunea „Exersezi, corectezi, progresezi”.
- Dacă ai bifat **0–11 enunțuri**: ai nevoie de o recapitulare sistematică. Solicită sprijinul profesorului și al colegilor pe parcursul vacanței de vară.

EVALUAREA PORTOFOLIULUI

Ce cuprinde portofoliul tău?

a) cuprinsul portofoliului;

b) lucrările individuale marcate în manual cu eticheta **Portofoliu**;

c) lucrări propuse de doamna/domnul profesor;

d) alte lucrări alese de tine;

e) o fișă cu impresii:

- *Mi-a plăcut ...*
- *Mi s-a părut interesant ...*
- *A fost ușor să ...*
- *Mi-a fost dificil să ...*

Cum știi dacă ai reușit?

- Portofoliul va fi evaluat de doamna/domnul profesor.
- Te vei autoevalua, folosind grila de autoevaluare. Dacă întâmpini dificultăți, cere ajutorul.

AUTOEVALUARE

Întrebare	**Da**	**Nu**
1. Lucrările sunt aranjate într-o mapă sau într-un dosar?		
2. Portofoliul cuprinde toate lucrările de la rubrica **Ce cuprinde portofoliul tău?**		
3. Lucrările sunt aranjate în ordinea dată de cuprins?		
4. Toate lucrările din portofoliu respectă cerințele de rezolvare?		
5. Aspectul portofoliului este îngrijit?		
6. Mi-a plăcut să îmi organizez portofoliul?		
7. Lucrările din portofoliu arată că am progresat?		

Jurnal de învățare — reflecție la finalul anului

Acest spațiu îți aparține. Folosește-l pentru a reflecta asupra parcursului tău din clasa a IX-a la matematică. Reflecția este parte esențială a învățării — te ajută să înțelegi ce ai învățat, ce te-a interesat și unde mai ai de lucrat.

1. Ce moment a fost cel mai dificil pentru tine în acest an?

2. Ce concept ți-a deschis o nouă perspectivă matematică (un *„aha!”*)?

3. Ce conexiuni ai descoperit între unități?

(de exemplu: cum logica din U1 te ajută la demonstrațiile din U7 sau cum funcțiile din U3 fundamentează trigonometria din U6)

4. Ce situație din viața de zi cu zi vezi acum cu „ochi de matematician”?

5. Ce aștepți cu cel mai mare entuziasm în clasa a X-a?

intuitext
grup SOFTWIN

MATEMATICĂ

CLASA A IX-A

www.intuitext.ro